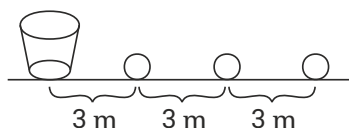




Farokhi-Edu.com

مرجع آموزشی فرخی

۱ در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده مجموعاً ۹۱۸ متر دویده باشد، تعیین کنید او چند توپ در سبد انداخته است؟



پاسخ: دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید $3 + 3 = 6$ متر طی کند، برای توپ دوم باید $6 + 6 = 12$ متر و برای توپ سوم $9 + 9 = 18$ متر و... طی کند. پس داریم:

$$a_1 = 6, d = 6$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 918 \Rightarrow \frac{n}{2}(12 + 6n - 6) = 918$$

$$3n(n+1) = 918 \Rightarrow \underbrace{n(n+1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 306 = \underbrace{17 \times 18}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} \Rightarrow n = 17$$

۲ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: جملات فرد دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است. پس:

$$S_{\text{فرد}} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9 \times 2d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

جملات زوج نیز دنباله‌ای حسابی با جمله اول a_2 و قدر نسبت $2d$ می‌باشد و تعداد آنها ۱۰ تا است پس:

$$S_{\text{زوج}} = \frac{10}{2}(2a_2 + 9 \times 2d) = 150 \Rightarrow 2(a_1 + d) + 18d = 30 \Rightarrow a_1 + 10d = 15$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ a_1 + 10d = 15 \end{cases} \Rightarrow d = 1,5, a_1 = 0$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = 150 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 135 \end{cases}$$

$$\underbrace{a_2 - a_1}_d + \underbrace{a_4 - a_3}_d + \dots + \underbrace{a_{20} - a_{19}}_d = 150 - 135 \Rightarrow 10d = 15 \Rightarrow d = 1,5$$

$$S_{20} = 135 + 150 \Rightarrow 10(2a_1 + 19d) = 285 \Rightarrow 2a_1 + 19 \times 1,5 = 28,5 \Rightarrow a_1 = 0$$

۳ مجموع همگی عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

پاسخ:

$$10 \leq 4k \leq 99 \Rightarrow 2,5 \leq k \leq 24,75$$

$$k = 3, 4, 5, \dots, 24 \Rightarrow n = 24 - 3 + 1 = 22$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12, & 16, & 20, & \dots, & 96 \end{matrix} \quad a_1 = 12, d = 4$$

$$S_{22} = \frac{22}{2}(a_1 + a_{22}) = 11(12 + 96) = 1188$$

۴) مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

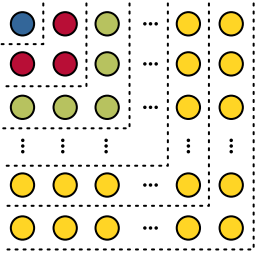
پاسخ:

$$6k = مضرب شش \rightarrow 100 \leq 6k \leq 999 \rightarrow 16,6 \leq k \leq 166,5$$

$$k = 17, 18, \dots, 166 \rightarrow \text{تعداد } n = 166 - 17 + 1 = 150$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 102, 108, \dots, 996 \end{array}$$

$$S_{150} = \frac{150}{2} (a_1 + a_{150}) = \frac{150}{2} (102 + 996) = 82350$$



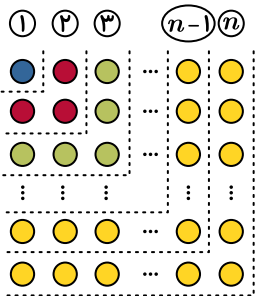
۵) الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود را در قسمت الف بررسی کنید.

پاسخ:

الف)



نقطه‌های مسیر n + ... نقطه‌های مسیر (۳) + نقطه‌های مسیر (۲) + نقطه‌های مسیر (۱) = تعداد کل نقطه‌ها

$$\text{تعداد کل نقطه‌ها} = \text{جدول } n \times n \text{ از نقطه‌ها} = n \times n = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

ب) $2n - 1$ برابر با n مین عدد فرد است پس: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی اعداد فرد است پس داریم:

$$a_1 = 1, d = 2 \rightarrow S_n = \frac{n}{2} (2 + (n - 1) \times 2) = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \times 2n = n^2$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

۶) در دنباله‌ی حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله‌ی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از 493 بیشتر شود؟

پاسخ:

$$a_1 = 5, d = 3 \rightarrow S_n > 493 \rightarrow \frac{n}{2} (10 + 3n - 3) > 493$$

$$3n^2 + 7n - 986 > 0 \quad \Delta = 49 + 12 \times 986 = 11881$$

$$n = \frac{-7 \pm \sqrt{11881}}{6} = \frac{-7 \pm 109}{6}, 17 \Rightarrow n < \frac{58}{3} \text{ یا } n > 17 \Rightarrow n \geq 18$$

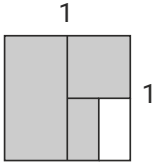
غ ق ق

۷) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر

مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

پاسخ:

دنباله مساحت‌های رنگ شده: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$



$$S_n \geq \frac{99}{100} \times 1 \rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n \geq 7 \rightarrow \text{حداقل 7 مرحله}$$

۸) برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^2 + a + 1)$$

پاسخ: الف) مجموع $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول یک و قدر نسبت a می‌باشد.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + & a & + & a^2 & + & \dots & + & a^{n-1} & & a_1 = 1, q = a \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \text{جمله اول} & & \text{جمله دوم} & & \text{جمله سوم} & & & & \text{جمله } n \text{ ام} & & \end{array}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

ب)

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۹) جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ می‌باشد. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

پاسخ:

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_1 = 1, q = 2 \rightarrow \text{دنباله: } 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = 255 \rightarrow \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 255 \Rightarrow 2^n = 256 \rightarrow n = 8$$

۱۰) مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را به دست آورید:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

پاسخ:

$$a_1 = \frac{1}{8}, q = 2 \quad S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{8}(2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$$

۱۱) طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت $52,8$ متر مربع تعداد دو هزار

کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

پاسخ: اگر عرض کاشی را x در نظر بگیریم، طول آن $4x + 1$ است.

$$52,8 \text{ m}^2 \times 10^4 = 528000 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{مساحت یک کاشی} = \frac{528000}{2000} = 264$$

$$\text{کاشی } S = x(4x + 1) = 264 \rightarrow 4x^2 + x - 264 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 4 \times (-264) = 4225 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 65}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{66}{8} & \text{غ ق ق} \\ x = 8 & \rightarrow \text{طول} = 4 \times 8 + 1 = 33 \end{cases}$$

$$x = 8 \rightarrow \text{طول} = 4 \times 8 + 1 = 33$$

۱۲) یک استخر مستطیل شکل به ابعاد، طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



	x		x
x		10	
	3		3
x		10	
	x		x

$$\text{آبراه } S = 4x^2 + 2 \times 10 \times x + 2 \times 3 \times x = 14$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 20x + 6x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 13^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 169 + 56 = 225$$

$$x = \frac{-13 \pm 15}{4} = -7 \quad \text{غ ق ق} \quad , \quad x = \frac{1}{2}$$

پاسخ:

 اگر پهنای آبراه را x در نظر بگیریم، داریم:

۱۳) اگر $x = -1$ یک ریشه‌ی معادله‌ی $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

پاسخ:

$$x = -1 \rightarrow 4x^2 - mx - 7 = 0 \rightarrow 4 + m - 7 = 0 \rightarrow m = 3$$

$$4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow (x + 1)(4x - 7) = 0 \rightarrow x = -1, x = \frac{7}{4}$$

۱۴) محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

پاسخ:

$$2(x + y) = 18 \Rightarrow (x + y) = 9 \Rightarrow y = 9 - x$$

$$xy = 14 \Rightarrow x(9 - x) = 14 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 7) = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 9 - 2 = 7 \\ x = 7 \Rightarrow y = 9 - 7 = 2 \end{cases}$$

۱۵) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که:

(الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند.

(ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

پاسخ: (الف)

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \quad P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{9} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

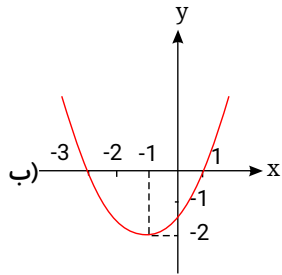
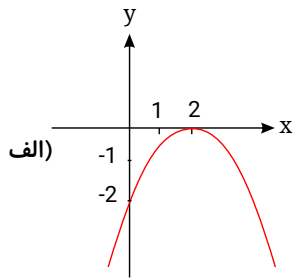
(ب) یکی از ریشه‌ها m و دیگری $2m$ می‌باشد و داریم:

$$S = m + 2m = 3m, \quad P = m \times 2m = 2m^2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$$

به‌ازای هر عدد حقیقی m یک معادله به دست می‌آید، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۱۶ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



پاسخ: الف) تابع دارای یک ریشه‌ی مضاعف در $x = 2$ است.
روش اول:

$$x = 0 \rightarrow P(0) = c = -2 \rightarrow P(x) = ax^2 + bx - 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a, (2, 0) \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 2(-4a) = 2 \Rightarrow -4a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 2$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

روش دوم:

$$\text{ریشه‌ی مضاعف } \Rightarrow x = 2 \rightarrow P(x) = a(x - 2)^2 \quad (0, -2) \Rightarrow -2 = a(0 - 2)^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(ب) روش اول:

$$x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$x = -3 \rightarrow y = 0 \rightarrow 9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a \xrightarrow{(1), (2)} 3a + c = 0$$

$$(-1, -2) \Rightarrow a - b + c = -2 \rightarrow a - 2a + c = -2 \rightarrow -a + c = -2$$

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a - c = -2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{2}, b = 1$$

$$P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

صفرهای تابع $x = 1$ و $x = -3$ است.

روش دوم: چون $x = 1$ و $x = -3$ ریشه‌های تابع هستند داریم:

$$P(x) = a(x + 3)(x - 1) \rightarrow (-1, -2) \Rightarrow -2 = a \times 2 \times (-2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(x+3)(x-1) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

۱۷) صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

پاسخ:

الف

$$f(x) = x^2 - 4x$$

پاسخ:

برای تعیین صفرهای هر تابع، باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}, x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

ب

$$g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x$$

پاسخ:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}, 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

ب

$$h(x) = x^2 + 3x^2 + 5$$

پاسخ:

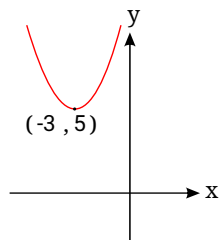
$$h(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x^2 + 5 = 0, x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.} \Rightarrow \text{تابع } h(x) \text{ صفر ندارد.}$$

۱۸) هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ راس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

پاسخ:

الف



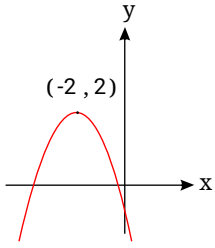
پاسخ:

$$\text{سهمی روبه بالا} \rightarrow a > 0 \rightarrow \boxed{a = 1} \rightarrow f(x) = x^2 + bx + a$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a = 6 \times 1 = 6 \rightarrow \boxed{b = 6}$$

$$(-3, 5) \rightarrow 5 = 9 - 3b + c \Rightarrow 5 = 9 - 18 + c \rightarrow \boxed{c = 14}$$

$$f(x) = x^2 + 6x + 14 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

ب


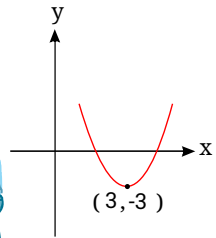
$$\text{سهمی روبه پایین } a < 0 \rightarrow \boxed{a = -1} \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$(-2, 2) \rightarrow 2 = -4 - 2b + c \Rightarrow 6 = -2(-4) + c \rightarrow \boxed{c = -2}$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 2 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -2 \pm \sqrt{2}$$



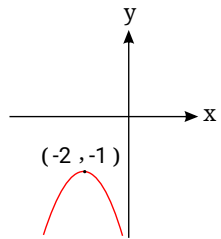
$$\text{سهمی روبه بالا } a > 0 \rightarrow \boxed{a = 1} f(x) = x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a = -6 \rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$(3, -3) \rightarrow 9 - 18 + c = -3 \rightarrow \boxed{c = 6}$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 6 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$



$$\text{سهمی روبه پایین } a < 0 \rightarrow \boxed{a = -1} \rightarrow f(x) = -x^2 + bx + c$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -2 \rightarrow b = 4a = 4(-1) = -4 \rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$(-2, -1) \rightarrow -4 - 2b + c = -1 \rightarrow -4 + 8 + c = -1 \rightarrow \boxed{c = -5}$$

$$f(x) = -x^2 - 4x - 5 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پاسخ:

پ

پاسخ:

ت

پاسخ:

۱۹) تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x - 1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

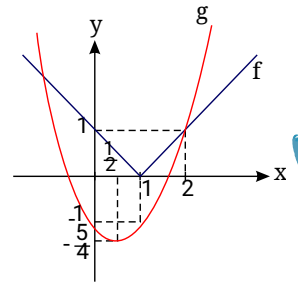
پاسخ:

$$f(x) = |x - 1|$$

$$g(x) = x^2 - x - 1$$

$$\text{راس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

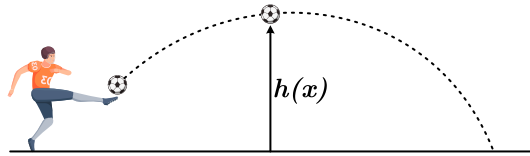
$$\text{راس } y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 - 2 - 4}{4} = -\frac{5}{4}$$



ریشه‌های معادله $\begin{cases} \text{یک ریشه مثبت} \rightarrow x = 2 \\ \text{یک ریشه منفی} \end{cases}$

۲۰) یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را

می‌توانیم با رابطه $h(x) = -0.3x(x - 36)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است. (x برحسب متر است).



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.
ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

پاسخ: الف) معادله حرکت توپ، یک تابع درجه دوم (سه‌می) به صورت روبه‌رو است:

$$h(x) = -0.3x^2 + 10.8x$$

منظور از قسمت الف) یافتن فاصله بین صفرهای این تابع درجه دوم است، بنابراین داریم:

$$-0.3x(x - 36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0.3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x - 36 = 0 \Rightarrow x_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = 36m$$

پس توپ ۳۶ متر را به‌طور افقی طی می‌کند تا به زمین اصابت کند.

ب) هدف یافتن عرض نقطه ماکزیمم (رأس) این تابع درجه دوم است. اگر نقطه ماکزیمم را با M نشان دهیم داریم:

$$h(x) = -0.3x^2 + 10.8x \Rightarrow x_M = \frac{-b}{2a} = \frac{-10.8}{-0.6}$$

$$\Rightarrow x_M = 18m \Rightarrow y_M = h(18) = -\frac{3}{100} \times 18(18 - 36) \Rightarrow y_M = 9.72m$$

حداکثر ارتفاع توپ از زمین ۹٫۷۲ متر است.

۲۱) یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t از رابطه‌ی

$$h(t) = -16t^2 + 144t$$

پاسخ:

$$h(t) = -16t^2 + 144t \rightarrow t = -\frac{b}{2a} = -\frac{144}{2(-16)} = 4.5$$

$$h_{\max} = -16(4.5)^2 + 144 \times 4.5 = -324 + 648 = 324$$

زمانی که موشک به زمین برخورد می‌کند $h = 0$ است. پس داریم:

$$h(t) = 0 \rightarrow -16t^2 + 144t = 0 \Rightarrow -16t(t - 9) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ و } t = 9$$

لحظه‌ی پرتاب $t = 0$ و زمان برخورد به زمین $t = 9$

۲۲) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به

دست آورید.

پاسخ:

$$x = -2 \rightarrow x^3 + kx^2 - x - 2 = 0 \rightarrow -8 + 4k + 2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{k = 2}$$

$f(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2$$

$$x^2 + 2x^2 - x - 2 \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x^2-1 \end{array} \right.$$

$$\frac{-x^2 - 2x^2}{-x - 2}$$

$$\frac{+x + 2}{\circ}$$

$$f(x) = (x+2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

روش دیگر: می‌توان $f(x)$ را تجزیه کرد.

$$x^2 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = -2, x = \pm 1$$

۲۳) معادلات زیر را حل کنید.

پاسخ:

الف)

$$x^2 - 3x^2 - 4 = 0$$

پاسخ:

$$x^2 - 3x^2 - 4 = 0, x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$t = 4, t = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}, x^2 = -1 \text{ غ ق ق}$$

ب)

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

پاسخ:

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0, \frac{x^2}{3} - 2 = t$$

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-6) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2\sqrt{6}}$$

پ)

$$(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) = 12$$

پاسخ:

$$\text{پ) } (4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0, 4 - x^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -3$$

$$4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}, 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{7}}$$

۲۴) فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از ۲ ساعت توقف

همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

پاسخ:

$$\text{زمان برگشت} = \frac{144}{V} = \text{سرعت حرکت در خلاف جریان}$$

$$\text{زمان رفت} = \frac{144}{V+8} = \text{سرعت حرکت در جهت جریان}$$

$$\frac{144}{V} + \frac{144}{V+8} = 17 - 2 \rightarrow 144\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V+8}\right) = 15$$

$$\frac{2V+8}{V(V+8)} = \frac{15}{144} = \frac{5}{48} \rightarrow 5V^2 + 40V = 96V + 384$$

$$\Rightarrow 5V^2 - 56V - 384 = 0 \rightarrow \Delta = 3136 + 7680 = 10816$$

$$V = \frac{56 \pm 104}{10} = -4,8 \text{ غ قق } , \boxed{V = 16}$$

۲۵) اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}$ آن گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟ پاسخ:

$$L + W = \frac{1}{2} \times 144 = 72 \rightarrow W = 72 - L$$

$$\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L} \Rightarrow \frac{L}{72-L} = \frac{72}{L} \Rightarrow L^2 = 72^2 - 72L$$

$$\Rightarrow L^2 + 72L - 72^2 = 0 \rightarrow \Delta = 72^2 + 4 \times 72^2 = 5 \times 72^2$$

$$L = \frac{-72 \pm 72\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{L>0} L = \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5} - 36$$

$$W = 72 - L = 72 - 36\sqrt{5} + 36 = 108 - 36\sqrt{5}$$

۲۶) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

پاسخ:

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \xrightarrow{\times y(y+5)} (3y+5) + y(y+4) = (y+1)(y+5)$$

$$\Rightarrow 3y + 5 + y^2 + 4y = y^2 + 6y + 5 \Rightarrow y = 0$$

چون $y = 0$ و $y = -5$ مخارج را صفر می‌کنند پس y به دست آمده قابل قبول نمی‌باشد و معادله جواب ندارد.

۲۷) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

پاسخ:

$$\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1} \xrightarrow{\times x(x+1)} 6(x+1) = 2x(x+1) + x(x-3)$$

$$6x + 6 = 2x^2 + 2x + x^2 - 3x \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 \times 3 \times (-6) = 49 + 72 = 121 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 11}{6} \Rightarrow x = 3, x = -\frac{2}{3}$$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

۲۸) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی

برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

پاسخ:

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x} \rightarrow \text{زمان ماشین } A \text{ به تنهایی}$$

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{x+15} \rightarrow \text{زمان ماشین } B \text{ به تنهایی}$$

$$\text{میزان کار در یک ساعت} = \frac{1}{18} \rightarrow \text{زمان هر دو ماشین با هم} = 18$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x(x+15)} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 36x + 270 \rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \quad x = 30, x = -9 \text{ غ ق ق}$$

$$\text{زمان ماشین } B \text{ به تنهایی} = 45 \rightarrow \text{زمان ماشین } A \text{ به تنهایی} = 30$$

۲۹) پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار

تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد، قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

پاسخ:

$$\frac{120}{x} = \text{تعداد اسباب بازی} \rightarrow \text{قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف} = x$$

$$\frac{120}{x-1} = \text{تعداد اسباب بازی} \rightarrow \text{قیمت اسباب بازی بعد از تخفیف} = x-1$$

$$\frac{120}{x-1} - \frac{120}{x} = 4 \Rightarrow 120 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = 4 \Rightarrow \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{4}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{30} \rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow (x-6)(x+5) = 0 \rightarrow x = 6$$

قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف ۶ هزار تومان بوده است.

۳۰) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = -\frac{3}{2}$$

پاسخ:

$$\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{P^2 + 4 - 2P}{P(2-P)} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2P^2 + 8 - 4P = -6P + 3P^2 \rightarrow P^2 - 2P - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (P-4)(P+2) = 0 \rightarrow P = 4, P = -2 \rightarrow \text{هر دو قابل قبول}$$

۳۱) معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ را حل کنید.

پاسخ:

$$\frac{1}{x-2} = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1, t = -3$$

$$t = 1 \rightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \rightarrow x-2 = 1 \rightarrow x = 3$$

$$t = -3 \rightarrow \frac{1}{x-2} = -3 \rightarrow x-2 = \frac{-1}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3}$$

۳۲) معادله زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

پاسخ:

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = 3x+4 \Rightarrow x = 4$$

حال $x = 4$ را در معادله اولیه امتحان می کنیم.

$$x = 4 \Rightarrow 2\sqrt{4} = \sqrt{12+4} \Rightarrow 2 \times 2 = \sqrt{16} \Rightarrow 4 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ قابل قبول}$$

۳۳) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

 پاسخ: با تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ داریم:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \frac{1-t}{1+t} = 1-t^2 \Rightarrow (1-t)(1+t) = 1-t^2 \Rightarrow (1-t)(1+t)(1+t) - (1-t) = 0$$

$$\Rightarrow (1-t) \left[(1+t)^2 - 1 \right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1+t)^2 - 1 = 0 \Rightarrow 1+t = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ t = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases} \\ 1-t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

 $x = 1$ و $x = 0$ در معادله صدق می‌کنند، پس هر دو قابل قبول هستند.

۳۴) معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

پاسخ:

$$\frac{3y+5}{y(y+5y)} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \Rightarrow \frac{3y+5+y^2+4y}{y(y+5y)} = \frac{y+1}{y}$$

 طرفین معادله را در $(y+5)$ ضرب می‌کنیم. پس داریم:

$$y^2 + 7y + 5 = (y+1)(y+5)$$

$$y^2 + 7y + 5 = y^2 + 6y + 5 \Rightarrow y = 0$$

 $y = 0$ غیر قابل قبول است، زیرا ریشهٔ مخرج است، بنابراین معادله جواب ندارد.

۳۵) معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$$

 پاسخ: طرفین معادله را در $2P(2-P)$ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$2P(P) + (2-P)(2)(2) = (2-P)(P)(-3) \Rightarrow 2P^2 + 4(2-P) = -3P(2-P)$$

$$\Rightarrow 2P^2 + 8 - 4P = -6P + 3P^2 \Rightarrow P^2 - 2P - 8 = 0$$

$$\Delta = 36 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{2} = 4 \\ x = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

۳۶) معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

پاسخ:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 4 - \sqrt{x+3}$$

$$2 \text{ توان} \Rightarrow 3x+1 = 16 + x + 3 - 8\sqrt{x+3} \Rightarrow 8\sqrt{x+3} = -2x + 18$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x+3} = 9 - x \xrightarrow{2 \text{ توان}} 16(x+3) = 81 - 18x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 81 - 16x - 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0$$

$$\text{جمع ضرایب} = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{c}{a} = 33$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ قابل قبول}$$

$$x = 33 \xrightarrow{\text{امتحان در معادله}} \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow 6 + 10 = 4 \text{ غلط} \Rightarrow x = 33 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

پاسخ:

$$\frac{5}{\sqrt{x} + 2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \xrightarrow{\times(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} 5(\sqrt{x} - 2) = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) - (\sqrt{x} + 2)$$

$$5\sqrt{x} - 10 = 2(x - 4) - \sqrt{x} - 2 \Rightarrow 2x - 8 - \sqrt{x} - 2 - 5\sqrt{x} + 10 = 0$$

$$2x - 6\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 9x \Rightarrow x(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 9$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} = 2 - \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \checkmark \Rightarrow x = 0 \text{ قابل قبول}$$

$$x = 9 \Rightarrow \frac{5}{5} = 2 - \frac{1}{3-2} \Rightarrow 1 = 2 - 1 \checkmark \Rightarrow x = 9 \text{ قابل قبول}$$

پاسخ:

الف)

$$\sqrt{1 - x^2} = x$$

پاسخ:

$$\sqrt{1 - x^2} = x \xrightarrow{x > 0} 1 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب)

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

پاسخ:

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x \xrightarrow{x > 0} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})^2$$

$$\Rightarrow (1 - \sqrt{x})((1 + \sqrt{x})^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ (1 + \sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = 0 = 1 - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} = 1 = 1 - 0$$

بنابراین هر دو جواب قابل قبول می‌باشند.

ب)

$$2 + \sqrt{1 + x} = \sqrt{x}$$

پاسخ:

$$\text{جواب ندارد } \frac{5}{4} \Rightarrow 5 + x + 4\sqrt{1 + x} = x \Rightarrow \sqrt{1 + x} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{معادله جواب ندارد } \sqrt{x} \Rightarrow 2 + \sqrt{1 + x} > \sqrt{x} \Rightarrow 1 + x > x \Rightarrow x > 0 \text{ :براه دوم}$$

پاسخ:

الف

$$f(x) = x|x|$$

پاسخ:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(-x) & x < 0 \\ x \cdot x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

ب

$$g(x) = |x^2 - 1|$$

پاسخ:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ -x^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline x-1 & - & - \circ + \\ x+1 & - \circ + & + \end{array}$$

پ

$$h(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

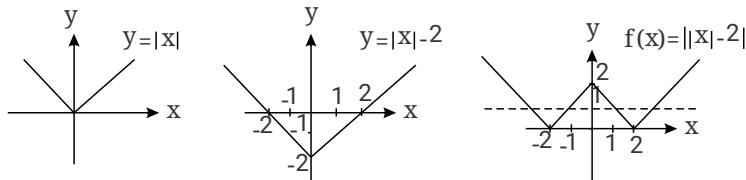
پاسخ:

$$h(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) & x < -1 \\ -(x-1) + x+1 & -1 \leq x < 1 \\ x-1 + x+1 & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$$

x	-1	1
x-1	-	- \circ +
x+1	- \circ +	+

۴۰ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

پاسخ:



خط $y = 1$ نمودار تابع f را در ۴ نقطه قطع می‌کند پس معادله $f(x) = 1$ دارای ۴ ریشه است، دو ریشه مثبت و دو ریشه منفی.

$$f(x) = 1 \Rightarrow ||x| - 2| = 1 \Rightarrow |x| - 2 = \pm 1 \Rightarrow |x| = 3, |x| = 1$$

$$|x| = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}, \quad |x| = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

۴۱ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های -1 و 3 روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

پاسخ: اگر نقطه‌های مورد نظر را x در نظر بگیریم، داریم:

$$|x - (-1)| + |x - 3| = 6 \Rightarrow |x + 1| + |x - 3| = 6$$

$$x < -1 \Rightarrow -x - 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2} \quad \text{قابل قبول}$$

$$-1 \leq x < 3 \Rightarrow x + 1 - x + 3 = 6 \Rightarrow 4 = 6 \quad \text{غلط}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x + 1 + x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 4} \quad \text{قابل قبول}$$

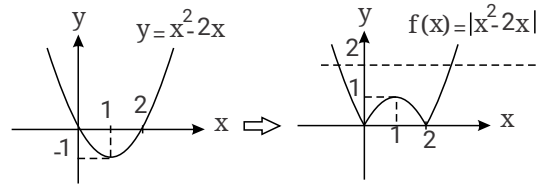
۴۲ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید. سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل نمایید.

پاسخ:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$\text{رأس } y = 1 - 2 = -1$$



چون خط $y = 2$ نمودار تابع f را در ۲ نقطه قطع می‌کند. معادله $|x^2 - 2x| = 2$ دارای ۲ ریشه است، یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد.

$$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = \pm 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 2x = -2 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

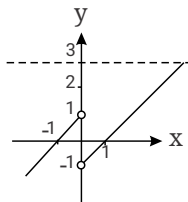
نمودار هریک از دو تابع زیر را رسم کنید. سپس به‌ازای $y = 3$ معادله‌های به‌دست‌آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید. (۴۳)

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$

ب) $y = |x^2 - 6x|$

پاسخ:

$$\text{الف) } y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - \frac{x}{-x} & x < 0 \\ x - \frac{x}{x} & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$$



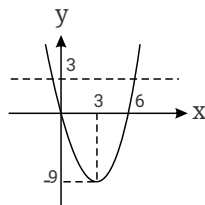
خط $y = 3$ نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس معادله $y = 3$ یک ریشه مثبت دارد.

$$x - \frac{x}{|x|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 & \text{غیرقابل قبول} \\ x > 0 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 & \text{جواب} \end{cases}$$

ب) $y = x^2 - 6x \rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

$$\text{رأس } y = 9 - 18 = -9$$



معادله $y = 3$ دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.

$$y = 3 \rightarrow x^2 - 6x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2}$$

هریک از عبارتهای زیر را با استفاده از نماد قدرمطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید. (۴۴)

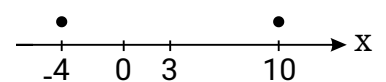
الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

پ) فاصله بین x و -3 بزرگ‌تر از ۲ است.

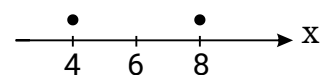
پاسخ: الف) فاصله بین x و ۳ برابر با $|x - 3|$ می‌باشد پس:

$$|x - 3| = 7 \Rightarrow x - 3 = \pm 7 \Rightarrow x = 10, x = -4$$



ب)

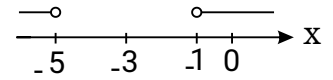
$$2|x - 6| = 4 \Rightarrow |x - 6| = 2 \Rightarrow x - 6 = \pm 2 \Rightarrow x = 8, x = 4$$



پ)



$$|x - (-3)| > 2 \Rightarrow |x + 3| > 2 \Rightarrow x + 3 < -2 \quad \text{یا} \quad x + 3 > 2 \Rightarrow x < -5 \quad \text{یا} \quad x > -1$$



۴۵) معادله‌های زیر را حل کنید.

پاسخ:

الف

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$\frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$x < 3 \Rightarrow \frac{2-x}{-(x-3)} = 1 \Rightarrow 2-x = -x+3 \Rightarrow 2=3 \text{ غلط} \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

$$x > 3 \Rightarrow \frac{2-x}{x-3} = 1 \Rightarrow x-3 = 2-x \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ غیر قابل قبول}$$

چون $x = \frac{5}{2}$ در شرط $x > 3$ صدق نمی‌کند پس غیر قابل قبول است.

پاسخ:

ب

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 2x + 1 \Rightarrow |x-1| = 2x + 1$$

$$x < 1 \Rightarrow -(x-1) = 2x + 1 \Rightarrow 2x + 1 = -x + 1 \Rightarrow x = 0 \text{ قابل قبول}$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2 \text{ غیر قابل قبول}$$

۴۶) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

پاسخ:

$$y = 2x \Rightarrow M(x, 2x) \Rightarrow OM + MA = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + [2(x-2)]^2} = 5$$

$$\Rightarrow |x| \sqrt{5} + \sqrt{(x-2)^2 + 4(x-2)^2} = 5 \Rightarrow |x| \sqrt{5} + \sqrt{5(x-2)^2} = 5$$

$$\Rightarrow |x| \sqrt{5} + |x-2| \sqrt{5} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}(|x| + |x-2|) = 5$$

$$\Rightarrow |x| + |x-2| = \sqrt{5}$$

$$x < 0 \rightarrow -x - x + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow x - x + 2 = \sqrt{5} \rightarrow 2 = \sqrt{5} \text{ غلط}$$

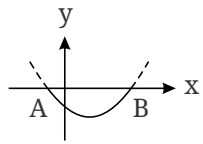
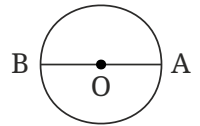
$$x > 2 \rightarrow x + x - 2 = \sqrt{5} \rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow M\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right)$$

۴۷) نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

پاسخ: وسط AB مرکز دایره است.

$$O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{-8+6}{2} \right) = (4, -1)$$

$$R = OA = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-6)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$



۴۸ شکل نمایی جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می شود.

الف) مختصات نقاط انتهایی عدسی A و B را به دست آورید.

ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

پاسخ: الف) نقاط A و B محل برخورد سهمی $y = x^2 - 8x - 20$ با محور x ها است یعنی باید معادله $y = 0$ را حل کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-10) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 10$$

$$\Rightarrow A = (-2, 0), B = (10, 0)$$

ب)

$$AB = \sqrt{(-2-10)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

پ) بیشترین ضخامت عدسی همان عرض نقطه رأس سهمی است.

$$y = x^2 - 8x - 20 \Rightarrow \text{اُس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4 \Rightarrow y = 16 - 32 - 20 = -36$$

$$\text{بیشترین ضخامت عدسی} = |-36| = 36 \text{ mm}$$

۴۹ نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

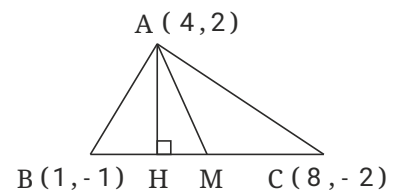
باشند طول MH را بیابید.

پاسخ:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$$m_{BC} = \frac{-1+2}{1-8} = -\frac{1}{7} \Rightarrow y+1 = -\frac{1}{7}(x-1)$$

$$\Rightarrow 7y+7 = -x+1 \Rightarrow x+7y = -6 \rightarrow \text{معادله } BC$$

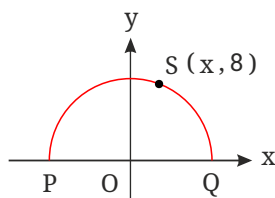


$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} = 7 \rightarrow y-2 = 7(x-4) \Rightarrow y-2 = 7x-28 \Rightarrow 7x-y = 26$$

$$\begin{cases} x+7y = -6 \\ 7x-y = 26 \end{cases} \xrightarrow{\times(-7)} \begin{cases} -7x-49y = 42 \\ 7x-y = 26 \end{cases} \Rightarrow -50y = 68 \Rightarrow y = -\frac{68}{50} = -1,36$$

$$x = -6 - 7y = -6 - 7(-1,36) = -6 + 9,52 \Rightarrow x = 3,52 \Rightarrow M(3,52, -1,36)$$

$$MH = \sqrt{\left(3,52 - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(-1,36 + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{0,9604 + 0,0196} = \sqrt{0,98}$$



۵۰ نقطه $S(x, 8)$ روی نیم دایره ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه رو داده شده است.

الف) مقدار x را به دست آورید.

ب) شیب خطهای PS و SQ را به دست آورید.

پ) نشان دهید \widehat{PSQ} قائمه است.

پاسخ:

$$\text{الف) } OS = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = \pm 6 \Rightarrow \text{نقطه } S \text{ در ناحیه اول} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = (6, 8)$$

$$\text{ب) } P = (-10, 0), Q = (10, 0) \Rightarrow m_{PS} = \frac{y_S - y_P}{x_S - x_P} = \frac{8 - 0}{6 - (-10)} = \frac{1}{2}$$

$$m_{SQ} = \frac{y_Q - y_S}{x_Q - x_S} = \frac{0 - 8}{10 - 6} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\text{پ) } m_{PS} \cdot m_{SQ} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ \Rightarrow \widehat{PSQ} = 90^\circ$$

۵۱) سه رأس مثلث ABC ، $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ و $C(3, 1)$ می باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می شود به دست آورید.

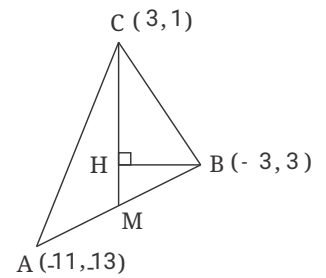
ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

پاسخ: الف)

$$M = \frac{A+B}{2} = (-7, -5)$$

$$m_{CM} = \frac{-5 - 1}{-7 - 3} = \frac{3}{5}$$

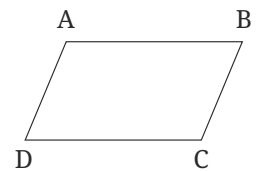
$$y - 1 = \frac{3}{5}(x - 3) \Rightarrow 5y - 5 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 5y - 4 = 0$$



$$BH = \frac{|3(-3) - 5 \times 3 - 4|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{|-9 - 15 - 4|}{\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{34}}$$

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow -11 + 3 = -3 + x_D$$

$$\Rightarrow x_D = -5$$



ب)

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -13 + 1 = 3 + y_D \Rightarrow y_D = -15$$

$$D = (-5, -15)$$

۵۲) اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

پاسخ:

$$ax + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

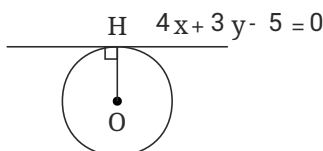
$$\Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64 \Rightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0$$

$$\Delta = 196 - 4 \times 3 \times 15 = 16 \rightarrow a = \frac{14 \pm 4}{6} \Rightarrow a = 3, \frac{5}{3}$$

۵۳) خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

پاسخ:

فاصله مرکز دایره تا خط همان شعاع دایره است.



$$R = OH = \frac{|4(-1) + 3 \times 2 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-4 + 6 - 5|}{5} = \frac{3}{5}$$

۵۴) ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ می باشد.

پاسخ: نقطه دلخواهی روی خط $ax + by + c = 0$ در نظر گرفته و فاصله آن را تا خط $ax + by + c' = 0$ به دست می آوریم.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$$

$$A = \left(0, -\frac{c}{b}\right) \Rightarrow \text{فاصله } A \text{ تا خط} = \frac{\left|0 + b\left(-\frac{c}{b}\right) + c'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۵۵) مثلث ABC به رأس های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی الساقین است.

پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

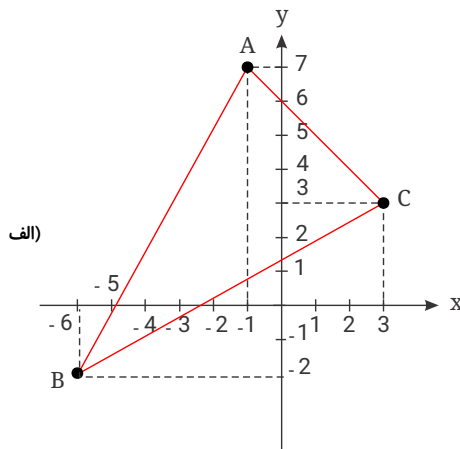
پاسخ:

$$\text{ب) } AB = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$$

$$AB = BC \Rightarrow \text{مثلث متساوی الساقین}$$



$$BC \text{ وسط } M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad m_{BC} = \frac{3 - (-2)}{3 - (-6)} = \frac{5}{9}$$

$$\text{عمود منصف } BC \text{ شیب } m = -\frac{9}{5} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{9}{5}x - \frac{22}{10} \rightarrow BC \text{ عمود منصف}$$

$$y + 2 = \frac{5}{9}(x + 6) \Rightarrow 5x - 9y + 12 = 0 \rightarrow BC \text{ معادله خط}$$

$$BC \text{ تا ضلع } A \text{ فاصله } AH = \frac{|5(-1) - 9 \times 7 + 12|}{\sqrt{25 + 81}} = \frac{56}{\sqrt{106}}$$