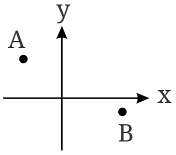
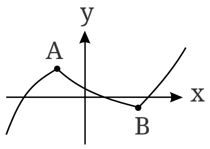
۱ در صفحهٔ مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



پاسخ:

بی‌شمار تابع می‌توان رسم کرد که از نقاط A و B در شکل مقابل عبور کنند.



۲ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطهٔ آن را بنویسید.

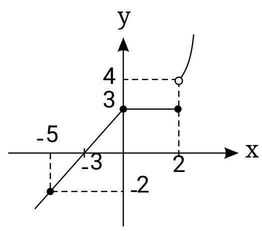
الف) دامنهٔ f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

ب) f در بازه $[۰, ۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول -۳ قطع می‌کند.

پاسخ:



$$\begin{matrix} f(-۵) = -۲ \\ f(۲) = ۳ \end{matrix} \quad D_f = R \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x < ۰ \\ ۳ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ x^۲ & x > ۲ \end{cases}$$

$$\left| \begin{matrix} -۳ \\ ۰ \end{matrix} \right. \quad \left| \begin{matrix} -۵ \\ -۲ \end{matrix} \right. \Rightarrow m = \frac{-۲ - ۰}{-۵ + ۳} = ۱ \Rightarrow \begin{matrix} y - ۰ = ۱(x + ۳) \\ y = x + ۳ \end{matrix}$$

۳ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد.

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲٫۸۹x + ۷۰٫۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲٫۷۵x + ۷۱٫۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو و برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

پاسخ:

الف) $x = ۳۵cm \to M(۳۵) = ۲٫۸۹ \times ۳۵ + ۷۰٫۶۴ = ۱۷۱٫۷۹cm$

ب) $M(x) = ۱۸۵cm \Rightarrow ۲٫۸۹x + ۷۰٫۶۴ = ۱۸۵$

$\to ۲٫۸۹x = ۱۱۴٫۳۶ \Rightarrow x = ۳۹٫۵۷cm$

۴ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\lvert x\rvert \end{cases}$	$\begin{cases} r:[۰,+\infty)\to\mathbb{R} \\ r(a)=۵a \end{cases}$
$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=۵x \end{cases}$	$\begin{cases} s:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ s(a)=۵a \end{cases}$
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $h(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$	$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=۵x \end{cases}$

پاسخ: تابع‌های f و h برابرند زیرا:

$$D_f=D_h=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\lvert x\rvert=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}\Rightarrow f(x)=h(x)$$

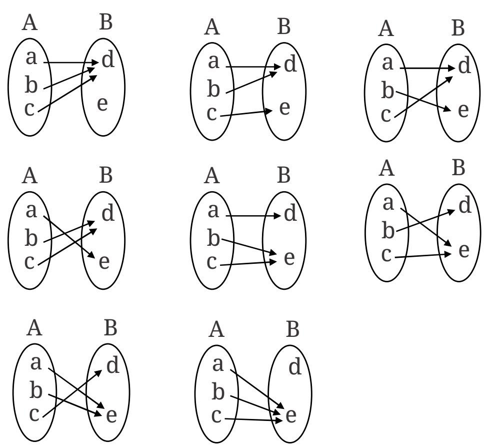
توابع g و s برابرند زیرا:

$$D_g=D_S=\mathbb{R}\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)=s(x)=۵x$$

تابع‌های r و t با تابع‌های g و s برابر نیستند، زیرا دامنهٔ آنها با دامنه توابع g و s یکسان نمی‌باشند.

۵ همهٔ تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید. (از نمودار پیکانی کمک بگیرید.)

پاسخ:



۶ تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد، چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

پاسخ:

$$f(x)=x^{۲}-۱ \qquad D_f=(۰,+\infty)$$

بی‌شمار تابع با دامنهٔ مجموعه اعداد حقیقی مثبت وجود دارد. با تغییر ضابطهٔ تابع می‌توان بی‌شمار تابع نوشت.

۷ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنهٔ دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

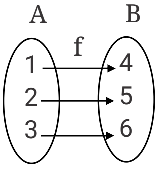
ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

پاسخ: الف) نادرست، ممکن است دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز برابر باشند ولی دو تابع برابر نباشند مانند:

$$f=\{(۱,۲),(۴,۵)\} \quad , \quad g=\{(۱,۵),(۴,۲)\}$$

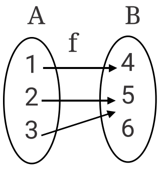
$$D_f=D_g=\{۱,۴\} \quad , \quad R_f=R_g=\{۲,۵\}\Rightarrow f\neq g$$

ب) درست، می‌تواند برد و هم دامنه تابع یکسان باشند، مانند:



$B = \{۴, ۵, ۶\} =$ هم دامنه $=$ برد تابع

پ) نادرست، برد تابع باید زیرمجموعه‌ای از هم دامنهٔ تابع باشد.



برد $R_f = \{۴, ۵\}$ ،هم‌دامنه $B = \{۴, ۵, ۶\}$, $B \not\subset R_f, R_f \subset B$

ت) درست، می‌توان بی‌شمار تابع با ضابطه‌های متفاوت و دامنهٔ یکسان $[۰, ۳]$ نوشت:

$f(x) = x \quad , \quad D_f = [۰, ۳] \quad , \quad g(x) = ۲x^۲ - x \quad , \quad D_g = [۰, ۳]$

۸ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معیّن، به وسیلهٔ یک نوع ویروس آلوده می‌شوند، با دستور $n(t) = \dfrac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t}$ به دست آید

که در آن $t > ۰$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

پاسخ:

الف) $t = ۵ \to n(۵) = \dfrac{۹۵۰۰ \times ۵ - ۲۰۰۰}{۴ + ۵} = \dfrac{۴۵۵۰۰}{۹} = ۵۰۵۵/۵$

ب) $n(t) = ۵۵۰۰ \Rightarrow \dfrac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴ + t} = ۵۵۰۰$

$\Rightarrow ۹۵۰۰t - ۲۰۰۰ = ۲۲۰۰۰ + ۵۵۰۰t \Rightarrow ۴۰۰۰t = ۲۴۰۰۰ \Rightarrow t = ۶$

۹ هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به وسیلهٔ تابع $f(x) = \dfrac{۲۵۵x}{۱۰۰ - x}$ محاسبه می‌شود که در آن x

درصد آلودگی و $f(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی $\%۵۰$ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

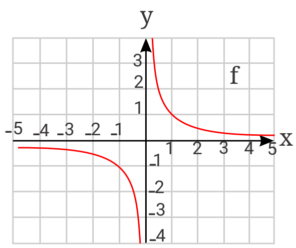
ب) دامنهٔ این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

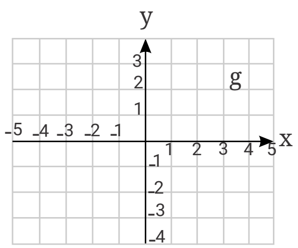
پاسخ:

الف) $x = ۵۰ \Rightarrow f(۵۰) = \dfrac{۲۵۵ \times ۵۰}{۱۰۰ - ۵۰} = ۲۵۵$

ب) $۰ \le x < ۱۰۰ \Rightarrow D_f = [۰, ۱۰۰)$

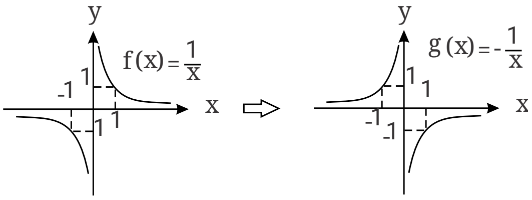
۱۰ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\dfrac{۱}{x}$ را رسم کرد.





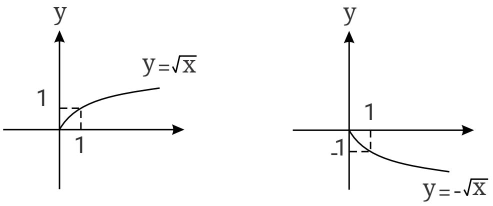
پاسخ: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

بنابراین برای رسم $g(x) = -\dfrac{۱}{x}$ باید نمودار $f(x) = \dfrac{۱}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



۱۱ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

پاسخ: برای رسم $y = -\sqrt{x}$ باید نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



۱۲ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هریک را معلوم کنید.

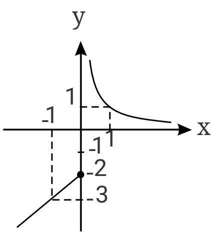
پاسخ:

الف

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ x - ۲ & x \leq ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ x - ۲ & x \leq ۰ \Rightarrow \begin{array}{|c|c}۰ & -۱ \\ -۲ & -۳\end{array} \end{cases}$$



$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = (-\infty, -۲] \cup (۰, +\infty)$

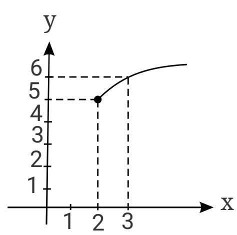
ب

$$f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۵$$

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x - ۲} + ۵, x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \Rightarrow D_f = [۲, +\infty)$$

$$\sqrt{x - ۲} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۲} + ۵ \geq ۵ \to f(x) \geq ۵ \Rightarrow R_f = [۵, +\infty)$$

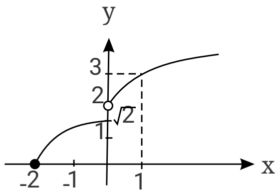


پ

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & x > ۰ \\ \sqrt{x + ۲} & -۲ \leq x \leq ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}\quad \begin{array}{c|c} -۲ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲}\end{array}$$

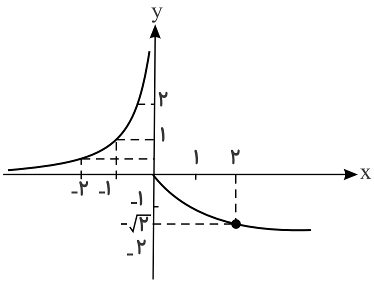


$$D_f=[-۲\,,+\infty)$$
$$R_f=[۰,\sqrt{۲}]\cup(۲,+\infty)$$

ت

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x} & x\ge ۰\end{cases}$$

پاسخ:



$$y=|x|=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & -۱ & -۲\\ \hline y & ۱ & \frac{۱}{۲}\end{array}\\[2ex] -\sqrt{x} & x\ge ۰ \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲\\ \hline y & ۰ & -\sqrt{۲}\end{array}\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}\,,\ R_f=(-\infty\,,\ ۰]\cup(۰\,,\ +\infty)=\mathbb{R}$$

۱۳ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

پاسخ:

الف

$$f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$$

پاسخ:

$$f(x)=\frac{x-۱}{۲-x},۲-x=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$$

ب

$$f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$$

پاسخ:

$f(x)=\dfrac{-۳x}{x^۲+۱},x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-۱$ ریشه ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

پ

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$$

پاسخ:

$$f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲},x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۴)=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ \ x=-۴$$

ت

$$f(x)=\sqrt{۳x+۱}$$

پاسخ:

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۳, -۴\}$

$f(x) = \sqrt{۳x + ۱}, ۳x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۳} \Rightarrow D_f = [-\frac{۱}{۳}, +\infty)$

ث

$$f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$$

پاسخ:

$f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳, x \geq ۰ \Rightarrow D_f = [۰, +\infty)$

ج

$$f(x) = \sqrt{۸ - x}$$

پاسخ:

$f(x) = \sqrt{۸ - x}, ۸ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۸ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۸]$

۱۴ کدام یک از معادلات زیر y را به‌صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

پاسخ:

الف

$$۳x + ۲y = ۱۲$$

پاسخ:

$۳x + ۲y = ۱۲ \Rightarrow ۲y = ۱۲ - ۳x \Rightarrow y = \frac{۱۲ - ۳x}{۲} \Rightarrow$ تابع است.

ب

$$x = ۱$$

پاسخ:

$x = ۱ \Rightarrow (۱, ۰), (۱, -۲), (۱, ۴), (۱, \sqrt{۵}), \cdots \Rightarrow$ تابع نیست.

$x = ۱$ یعنی تمام زوج‌مرتب‌هایی که مؤلفهٔ اول آنها یک می‌باشد، پس تابع نیست.

پ

$$y = -۲$$

پاسخ:

$y = -۲ \Rightarrow (۴, -۲), (۰, -۲), (۵, -۲), (\sqrt{۳}, -۲), \cdots$ تابع است.

$y = -۲$ خطی افقی موازی محور xها است، پس تابع می‌باشد.

ت

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \leq ۰ \\ x - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \leq ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \\ x - ۱ & x \geq ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \end{cases}$

برای $x = ۰$ دو مقدار برای y به‌دست آمده است، پس تابع نمی‌باشد.

ث

$$y^۲ = x^۲$$

پاسخ:

$y^۲ = x^۲ \Rightarrow \sqrt{y^۲} = \sqrt{x^۲} \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow$ تابع نیست.

مثال نقض : $x = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱^۲ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$

ج

$$y = |x|$$

پاسخ:

$$y = |x|$$

در رابطهٔ $y = |x|$ به‌ازای هر x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید، پس تابع است.

۱۵ کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

پاسخ:

الف

$$۳x + ۲y = ۱۲$$

پاسخ:

$$۳x + ۲y = ۱۲ \Rightarrow ۲y = -۳x + ۱۲ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + ۶$$

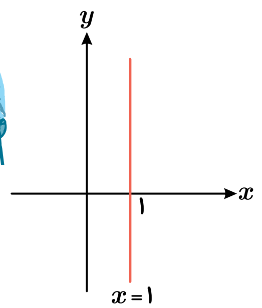
y برحسب x یک جواب دارد، پس تابع است.

ب

$$x = ۱$$

پاسخ:

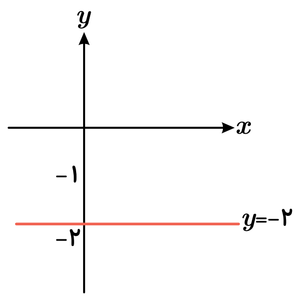
تابع نیست، زیرا به‌ازای مقدار ثابت ۱ برای x، y هر مقداری می‌تواند باشد. مثلاً دو زوج مرتب $(۱, ۲)$ و $(۱, ۴)$ در رابطهٔ $x = ۱$ صدق می‌کنند، پس تابع نیست. نمودار آن خطی قائم موازی محور yها است.



پ

$$y = -۲$$

پاسخ: تابع است، زیرا به‌ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.



ت

$$f(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \leq ۰ \\ x - ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

پاسخ: $y_۱ = x + ۳$ روی دامنهٔ خود ($x \leq ۰$) تابع است. همین‌طور $y_۲ = x - ۱$ روی دامنهٔ خود ($x \geq ۰$) تابع می‌باشد. حال با اشتراک دامنه‌ها خواهیم داشت:

$$x \leq ۰ \cap x \geq ۰ = \{۰\}$$

برای x مشترک، مقادیر y را از دو ضابطهٔ تابع به دست می‌آوریم. اگر مقدار yها برابر باشد، f تابع است:

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ + ۳ = ۳ \\ y = ۰ - ۱ = -۱ \end{cases}$$

چون به‌ازای $x=0$ دو مقدار برای y به دست آمده است، پس f تابع نیست.

ث

$$y^2=x^2$$

پاسخ:

$$y^2=x^2 \Rightarrow \sqrt{y^2}=\sqrt{x^2} \Rightarrow |y|=|x| \Rightarrow y=\pm x$$

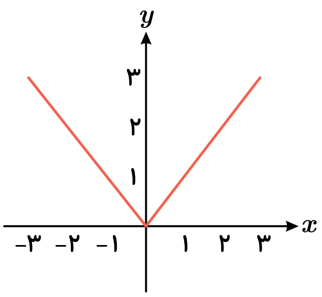
مثال نقض: $x=2 \Rightarrow y^2=2^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

y برحسب x دو جواب دارد، پس تابع نیست.

ج

$$y=|x|$$

پاسخ: تابع است، زیرا به‌ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.



$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

x	۰	۱
y	۰	۱

x	-1	-2
y	۱	۲

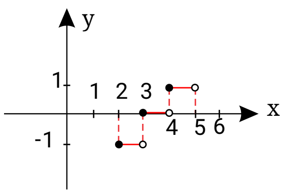
۱۶ نمودارهای دو تابع $y=[x-3]$ و $y=[x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

پاسخ:

$$y=[x-3] \Rightarrow \begin{cases} -1\leq x-3<0 \Rightarrow & 2\leq x<3 & \Rightarrow & y=-1 \\ 0\leq x-3<1 & \Rightarrow 3\leq x<4 & \Rightarrow & y=0 \\ 1\leq x-3<2 & \Rightarrow 4\leq x<5 & \Rightarrow & y=1 \end{cases}$$

$$y=[x]-3 \Rightarrow \begin{cases} 2\leq x<3 & \Rightarrow [x]=2 & \Rightarrow y=-1 \\ 3\leq x<4 & \Rightarrow [x]=3 & \Rightarrow y=0 \\ 4\leq x<5 & \Rightarrow [x]=4 & \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو تابع بالا با هم برابرند به همین دلیل تنها یک نمودار وجود دارد.



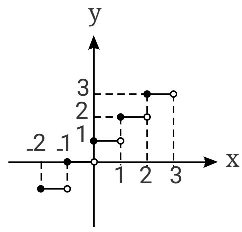
۱۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

پاسخ:

الف

$$f(x)=[x]+1,\qquad -2\leq x<3$$

پاسخ:



$f(x) = [x] + ۱ \quad -۲ \leq x < ۳$

$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۲ + ۱ = -۱$

$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow f(x) = -۱ + ۱ = ۰$

$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow f(x) = ۰ + ۱ = ۱$

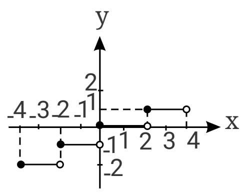
$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۱ + ۱ = ۲$

$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow f(x) = ۲ + ۱ = ۳$

ب

$$f(x) = [\frac{۱}{۲}x] \;,\; -۴ \leq x < ۴$$

پاسخ:



$f(x) = [\frac{۱}{۲}x] \quad -۴ \leq x < ۴ \Rightarrow -۲ \leq \frac{۱}{۲}x < ۲$

$-۲ \leq \frac{۱}{۲}x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۲, -۴ \leq x < -۲$

$-۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۰ \Rightarrow f(x) = -۱, -۲ \leq x < ۰$

$۰ \leq \frac{۱}{۲}x < ۱ \Rightarrow f(x) = ۰, ۰ \leq x < ۲$

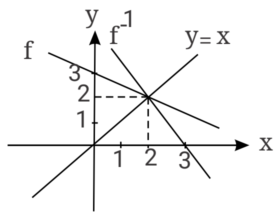
$۱ \leq \frac{۱}{۲}x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۱, ۲ \leq x < ۴$

۱۸ **تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.**

پاسخ: تابعی که به هر شخصی محل تولد او را نسبت می‌دهد یک به یک نیست، زیرا چندین نفر وجود دارند که محل تولد آنها یکسان است.

۱۹ **وارون تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.**

پاسخ:



$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۰ \\ y = ۳ \end{array} \right| \begin{array}{l} x = ۲ \\ y = ۲ \end{array}$$

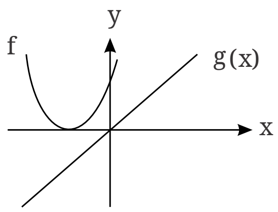
$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = y - ۳$$

$$x = -۲y + ۶ \Rightarrow y = -۲x + ۶$$

$$f^{-۱}(x) = -۲x + ۶$$

۲۰ **نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$**

پاسخ: تابع f وارون‌پذیر نباشد یعنی یک به یک نباشد، بنابراین خطی افقی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع f را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. با فرض $g(x) = x$ ، $x < f(x)$ یعنی $g(x) < f(x)$، پس باید نمودار f بالای نیمساز ربع اول و سوم $(g(x) = x)$ قرار گیرد.



۲۱) اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک‌به‌یک است؟

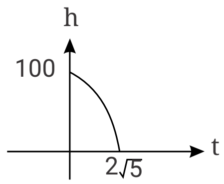
پ) تابع وارون h را به دست آورید.

پاسخ: الف) برد تابع h همان ارتفاع ۱۰۰ متر است یعنی بازهٔ بسته $[0, 100]$ و برای یافتن دامنه تابع h باید مدت زمان رسیدن به زمین را بیابیم یعنی باید معادله $h = 0$ را حل کنیم.

$$h = 0 \Rightarrow 100 - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = \frac{100}{5} = 20 \Rightarrow t = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 0 \le t \le 2\sqrt{5} \Rightarrow D_h = \left[0, 2\sqrt{5}\right], R_h = [0, 100]$$

ب) نمودار تابع h بر حسب t به صورت مقابل است. از نمودار واضح است که تابع h تابعی یک به یک است.



پ)

$$h = 100 - 5t^2 \Rightarrow 5t^2 = 100 - h \Rightarrow t^2 = 20 - \frac{1}{5}h$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{20 - \frac{1}{5}h} \Rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{20 - \frac{1}{5}t} \quad 0 \le t \le 100$$

۲۲) آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟

پاسخ: خیر. تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ تابع ثابت بوده و یک به یک نمی‌باشد. پس وارون‌پذیر هم نیست.

۲۳) اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$ به دست می آید.

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می کند؟

پاسخ:

الف) $h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$

$$h_{\max} = 100 \quad \Rightarrow \quad h = 100 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$h_{\min} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1000}{49} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10\sqrt{10}}{7}$$

$$D_{h(t)}: \quad 0 \le t \le \frac{10\sqrt{10}}{7} \quad \Rightarrow \quad D_{h(t)} = \left[0, \frac{10\sqrt{10}}{7}\right]$$

$$R_{h(t)}: \quad 0 \le h(t) \le 100 \quad \Rightarrow \quad R_{h(t)} = [0, 100]$$

ب) $۱۰۰-\frac{۴۹t_۱^۲}{۱۰}=۱۰۰-\frac{۴۹t_۲^۲}{۱۰} \quad \Rightarrow \quad t_۱^۲=t_۲^۲ \xrightarrow{t>۰} t_۱=t_۲$

یعنی امکان ندارد که سنگ در دو زمان در یک مکان قرارداشته باشد.

ج) $y=h(t)=۱۰۰-\frac{۴۹}{۱۰}t^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{۴۹}{۱۰}t^۲=۱۰۰-y$

$$\Rightarrow \quad t^۲=\frac{۱۰}{۴۹}(۱۰۰-y) \quad \Rightarrow \quad t=\frac{۱}{۷}\sqrt{۱۰(۱۰۰-y)}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-۱}(h)=\frac{۱}{۷}\sqrt{۱۰(۱۰۰-h)}$$

د) نشان می‌دهد سنگ در چه زمانی به ارتفاع خاص می رسد و ارتفاع را به زمان تبدیل می کند.

۲۴ تابع $f(x)=ax+b$ ، $a\neq ۰$ داده شده است همه مقادیر b, a را که به ازای آن ها $f^{-۱}(x)=f(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$f(x)=ax+b \qquad a\neq ۰$$

$$y=ax+b \quad \Rightarrow \quad \frac{y-b}{a}=x \quad \Rightarrow \quad f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=f^{-۱}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{x-b}{a}=ax+b \begin{cases} \frac{x}{a}=ax \to x=a^۲x \to a^۲=۱ \to a=\pm ۱ \\ -\frac{b}{a}=b \end{cases}$$

$$a=۱ \quad \Rightarrow \quad -b=b \quad \Rightarrow \quad b=۰ \quad \Rightarrow \quad (a=۱\ ,\ b=۰) \Rightarrow f(x)=x$$

$$a=-۱ \quad \Rightarrow \quad b=b \quad \Rightarrow \text{هر مقدار} \Rightarrow (a=-۱\ ,\ b\text{هر مقدار}) \Rightarrow f(x)=-x+b$$

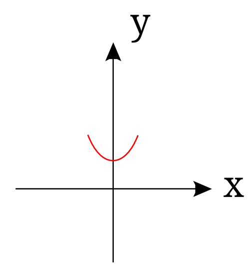
۲۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x<f(x)$

پاسخ: کافی است نموداری رسم کنیم که در $x\leq ۰$ در بالای محور xها باشد و برای $x>۰$ در ربع اول و بالاتر از نیمساز ناحیه‌ی اول رسم شود.

$$y=x^۲+a$$
$$(a>۱)$$



۲۶ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطهٔ تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به دست آورید.

پاسخ:

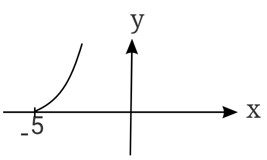
الف

$$f(x)=(x+۵)^۲, x\geq -۵$$

پاسخ:

تابع وارون‌پذیر است زیرا یک‌به‌یک است.

$$f(x)=(x+۵)^۲, x\geq -۵$$



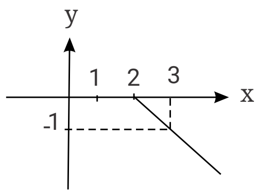
$$y=(x+۵)^۲ \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x+۵)^۲} \Rightarrow |x+۵|=\sqrt{y} \xrightarrow{x\geq -۵} x+۵=\sqrt{y}$$

$x = \sqrt{y} - ۵ \Rightarrow y = \sqrt{x} - ۵ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x} - ۵$

ب

$$f(x) = -\left|x - ۱\right| + ۱, x \geq ۲$$

پاسخ:



$f(x) = -\left|x - ۱\right| + ۱, x \geq ۲ \Rightarrow x - ۱ \geq ۱ \Rightarrow \left|x - ۱\right| = x - ۱$

$f(x) = -(x - ۱) + ۱ = -x + ۲, x \geq ۲ \quad \begin{vmatrix} x = ۲ \\ y = ۰ \end{vmatrix} \; , \; \begin{vmatrix} x = ۳ \\ y = -۱ \end{vmatrix}$

$x \geq ۲ \Rightarrow -x \leq -۲ \Rightarrow -x + ۲ \leq ۰ \Rightarrow y \leq ۰$

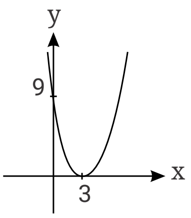
$y = -x + ۲ \Rightarrow x = ۲ - y \Rightarrow y = f^{-۱}(x) = ۲ - x, x \leq ۰$

پ

$$f(x) = (x - ۳)^۲$$

پاسخ:

$f(x) = (x - ۳)^۲$ تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نمی‌باشد.



ت

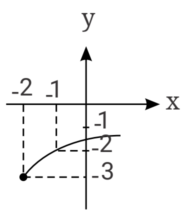
$$f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۳$$

پاسخ:

$f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۳, x + ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_f = [-۲, +\infty)$

$\sqrt{x + ۲} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x + ۲} - ۳ \geq -۳ \Rightarrow f(x) \geq -۳ \Rightarrow R_f = [-۳, +\infty)$

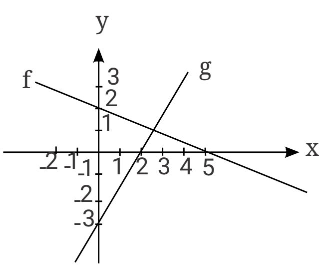
تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.



$y = \sqrt{x + ۲} - ۳ \Rightarrow \sqrt{x + ۲} = y + ۳ \Rightarrow x + ۲ = (y + ۳)^۲ = y^۲ + ۶y + ۹$

$\Rightarrow x = y^۲ + ۶y + ۷ \Rightarrow y = f^{-۱}(x) = x^۲ + ۶x + ۷, D_{f^{-۱}} = [-۳, +\infty)$

۲۷ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$, $f - g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید.



پاسخ: تابع f تابع خطی است که از نقاط $(۰, ۲)$ و $(۵, ۰)$ می‌گذرد پس داریم:

$$m=\frac{2-0}{0-5}=-\frac{2}{5}\Rightarrow y-2=-\frac{2}{5}(x-0)\Rightarrow y=f(x)=-\frac{2}{5}x+2, D_f=\mathbb{R}$$

تابع g تابع خطی است که از نقاط $(-3, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m=\frac{-3-0}{0-2}=\frac{3}{2}\Rightarrow y-(-3)=\frac{3}{2}(x-0)\Rightarrow y=g(x)=\frac{3}{2}x-3, D_g=\mathbb{R}$$

$$D_f\cap D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_{f+g}=\mathbb{R}, (f+g)(x)=f(x)+g(x)=-\frac{2}{5}x+2+\frac{3}{2}x-3$$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=\frac{11}{10}x-1$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=-\frac{2}{5}x+2-\frac{3}{2}x+3=-\frac{19}{10}x+5, D_{f-g}=\mathbb{R}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(-\frac{2}{5}x+2)(\frac{3}{2}x-3)=-\frac{3}{5}x^2+\frac{6}{5}x+3x-6$$

$$(f\cdot g)(x)=-\frac{3}{5}x^2+\frac{21}{5}x-6, D_{fg}=\mathbb{R}$$

۲۸ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است. کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هریک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هریک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهد.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

پاسخ: الف) تابع‌های تعداد نسخه‌های این دو کتاب را با f و g نمایش می‌دهیم.

$$f(x)=10+(x-1)\times 7=7x+3, g(x)=20+(x-1)\times 9=9x+11$$

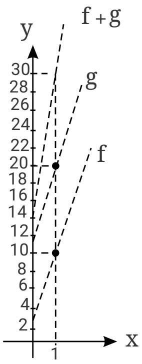
$$D_f=D_g=\mathbb{N}$$

ب)

$$D_f\cap D_g=\mathbb{N}\to (f+g)(x)=f(x)+g(x)=7x+3+9x+11=16x+14$$

ت)

$$f(x)=7x+3, g(x)=9x+11, (f+g)(x)=16x+14$$



۲۹ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ باز هم یک تابع خطی است.

پاسخ:

$$y=ax+b\Rightarrow ax=y-b\xrightarrow{a\neq 0}x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$ تابع وارون

با فرض $m=\frac{1}{a}$ و $n=-\frac{b}{a}$ داریم:

تابع خطی است. $y=mx+n \Rightarrow$

۳۰) اگر $f(x)=x^{۲}-۹$ و $g(x)=x+۳$ ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳, D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

پاسخ: زمانی می‌توان یک عبارت را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که آن عبارت مخالف صفر باشد، یعنی در این سوال زمانی می‌توان $x+۳$ را از صورت و مخرج کسر ساده کرد که $x+۳\neq ۰$ پس: $x\neq -۳$ یعنی:

$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۳\}$

۳۱) اگر

$$f=\left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\right\}$$

و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$، توابع $f-g, f+g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$f=\left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\right\}, D_f=\left\{-۴,-۱,۰,\frac{۵}{۲},۳\right\}$

$g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}, D_g=\{-۴,-۲,۰,۳,۵,۹\}$

$D_f\cap D_g=\{-۴,۰,۳\}$

$f+g=\{(-۴,۱۳+(-۷)),(۰,۵+(-۳)),(۳,-۵+۰)\}=\{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$

$f-g=\{(-۴,۱۳-(-۷)),(۰,۵-(-۳)),(۳,-۵-۰)\}=\{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$

$\frac{f}{g}=\{(-۴,\frac{۱۳}{-۷}),(۰,\frac{۵}{-۳}),\underbrace{(۳,\frac{-۵}{۰})}_{\text{تعریف نشده}}\}=\left\{(-۴,-\frac{۱۳}{۷}),(۰,-\frac{۵}{۳})\right\}$

۳۲) تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

تابعی بنویسید که درجهٔ سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجهٔ فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

پاسخ: باید تابع وارون تابع f را به‌دست آوریم.

$f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)\Rightarrow x-۳۲=\frac{۹}{۵}y\Rightarrow x=\frac{۹}{۵}y+۳۲\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$

۳۳) اگر $f(x)=۲x+۵$، $f^{-۱}(x)$، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به دست آورید.

پاسخ:

$f(x)=۲x+۵\Rightarrow y=۲x+۵\Rightarrow ۲x=y-۵\Rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$

$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=f(\frac{x-۵}{۲})=۲(\frac{x-۵}{۲})+۵=x-۵+۵=x$

$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=f^{-۱}(۲x+۵)=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=\frac{۲x}{۲}=x$

۳۴) فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n\end{cases}$، $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن: $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به دست آورید.

پاسخ:

$D_g=\mathbb{N}, D_f=\{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳,۴\}$

$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+۲=۴, (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۳+۴=۷$

$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۵+۶=۱۱, (f+g)(۴)=f(۴)+g(۴)=۷+۸=۱۵$

$f+g=\{(۱,۴),(۲,۷),(۳,۱۱),(۴,۱۵)\}$

$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۲)=۲\times ۲=۴, (gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۶$

$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۵)=۱۰, (gof)(۴)=g(f(۴))=g(۷)=۱۴$

$gof=\{(۱,۴),(۲,۶),(۳,۱۰),(۴,۱۴)\}$

۳۵ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به دست آورید.

پاسخ:

$f(x)=\frac{۱}{x-۳}, x\neq ۳ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۳\}$

$g(x)=\frac{۴}{x}, x\neq ۰ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|g(x)\in D_f\}=\{x\neq ۰\,|g(x)\neq ۳\}$

$g(x)\neq ۳ \Rightarrow \frac{۴}{x}\neq ۳ \Rightarrow x\neq \frac{۴}{۳} \Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}-\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{۴}{x})=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{۱}{\frac{۴-۳x}{x}}=\frac{x}{۴-۳x}$

۳۶ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}, f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به دست آورید.

پاسخ:

$f(x)=۴x, D_f=\mathbb{R}, g(x)=۲-x, D_g=\mathbb{R}$

$D_f\cap D_g=\mathbb{R}, g(x)=۰ \Rightarrow ۲-x=۰ \Rightarrow x=۲$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}, (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x}$

$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}, (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۵x-۲$

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,|(۲-x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲-x)=۴(۲-x)=۸-۴x$

۳۷ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}, g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، دامنه و ضابطه توابع fog و gof را به دست آورید.

پاسخ:

$f(x)=\sqrt{x^۲+۵} \Rightarrow x^۲+۵\geq ۰ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{۴-x^۲} \Rightarrow ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow |x|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \Rightarrow D_g=[-۲,۲]$

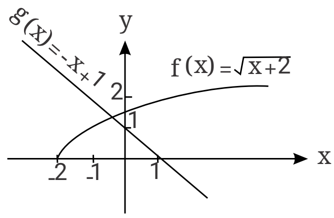
$D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\left\{x\in[-۲,۲]|\sqrt{۴-x^۲}\in R\right\}=[-۲,۲]$

$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\left\{x\in\mathbb{R}|\sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\right\} \Rightarrow -۲\leq x^۲+۵\leq ۲$

$-۷\leq x^۲\leq -۳ \Rightarrow$ غیرممکن $\Rightarrow D_{gof}=\varnothing$ gof وجود ندارد

$fog(x)=f(\sqrt{۴-x^۲})=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$

۳۸ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده‌شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



پاسخ:

الف

$(f+g)(۲)$

پاسخ:

$f(x)=\sqrt{x+۲}, D_f=[-۲,+\infty)$

$g(x)=-x+۱, D_g=\mathbb{R}$

$D_f \cap D_g=[-۲,+\infty) \Rightarrow D_{f+g}=[-۲,+\infty)$

$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=\sqrt{۴}+(-۲+۱)=۲+(-۱)=۱$

ب

$(f+g)(-۳)$

پاسخ:

$-۳ \notin [-۲,+\infty) \Rightarrow (f+g)(-۳)=$ تعریف نشده

پ

$(fg)(\frac{۱}{۲})$

پاسخ:

$(fg)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲})g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}\times(-\frac{۱}{۲}+۱)=\sqrt{\frac{۵}{۲}}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۲}}$

ت

$(fog)(-۴)$

پاسخ:

$(fog)(-۴)=f(g(-۴))=f(۵)=\sqrt{۵+۲}=\sqrt{۷}$

ث

$\frac{f}{g}(۰)$

پاسخ:

$(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$

ج

$(gof)(-۱)$

پاسخ:

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt{-1+2}) = g(1) = -1+1 = 0$$

۳۹ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

پاسخ:

الف اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آنگاه $(fog)(4) = 35$.

پاسخ: نادرست: $(fog)(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

ب اگر $f(x) = x+4$ و $g(x) = 3x$ آنگاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$

پاسخ: درست $(\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3\times 2} = \frac{6}{6} = 1$

پ اگر $g(x) = 2x-1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آنگاه $(fog)(5) = g(2)$

پاسخ: درست $(fog)(5) = f(g(5)) = f(10-1) = f(9) = \sqrt{9} = 3 = g(2)$

ت برای هر دو تابع f و g داریم: $fog = gof$

پاسخ: نادرست: ترکیب توابع خاصیت جابجایی ندارد یعنی: $fog \neq gof$

ث اگر $f(x) = x^2-4$ و $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ آنگاه $(fog)(5) = -25$ و $(fog)(x) = -x^2$

پاسخ: نادرست $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2-4}) = (\sqrt{x^2-4})^2 - 4 = x^2 - 8$

ج برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

پاسخ: درست $D_{f\cdot g} = D_{g\cdot f} = D_f \cap D_g, (f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (g\cdot f)(x)$