



Farrokhi-Edu.com

مرجع آموزشی فرخی

۱) در تصفیه آب، داخل فیلترها لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها دو لایه قرار دهیم، آنگاه $۰,۷ \times ۰,۷ = ۰,۴۹$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. (الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟

(ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

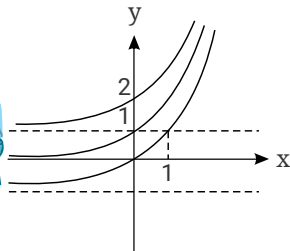
پاسخ: (الف) درصد ناخالصی‌های باقیمانده در آب تابعی از تعداد لایه‌ها می‌باشد، اگر تعداد t لایه استفاده شود و درصد ناخالصی‌های باقی‌مانده را با $f(t)$ نشان دهیم، داریم:

$$f(t) = (۰,۷)^t$$

(ب) بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌ها از بین برود، یعنی ناخالصی‌های باقی‌مانده کمتر از ۴ درصد می‌باشد یعنی داریم:

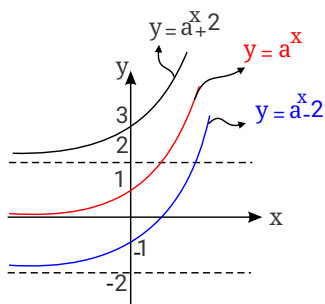
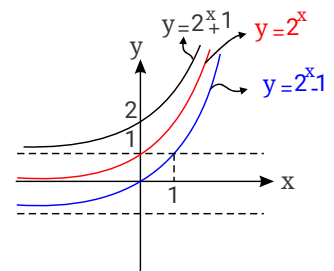
$$f(t) \leq \frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow (۰,۷)^t \leq ۰,۰۴ \Rightarrow \log_{(۰,۷)}(۰,۷)^t \geq \log_{(۰,۷)}(۰,۰۴) \Rightarrow t \geq \log_{(۰,۷)}(۰,۰۴) \Rightarrow t \geq ۹,۰۲$$

حداقل ۱۰ لایه باید قرار داد.



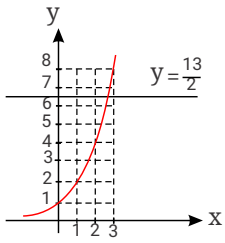
۲) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x + 2$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$)

پاسخ:



برای رسم $y = a^x + 2$ باید نمودار $y = a^x$ را ۲ واحد بالا ببریم و همچنین برای رسم $y = a^x - 2$ باید نمودار $y = a^x$ را ۲ واحد پایین ببریم. ($a > 1$)

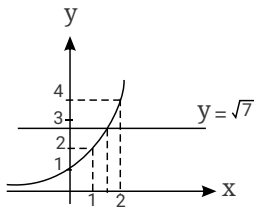
۳ الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟



ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

پاسخ: الف) طبق شکل طول نقطه برخورد خط $y = \frac{13}{2}$ با نمودار $y = 2^x$ عددی بین ۲ و ۳ می باشد.

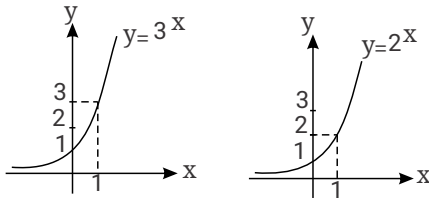
$$2^x = \frac{13}{2} \Rightarrow 2^2 < \frac{13}{2} < 2^3 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$$



ب) طول نقطه برخورد خط $y = \sqrt{7}$ و $y = 2^x$ عددی بین ۱ و ۲ می باشد. زیرا: $2^x = \sqrt{7}$

$$2^1 < \sqrt{7} < 2^2 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^2 \Rightarrow 1 < x < 2$$

۴ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.



الف) $3^{1-\sqrt{2}}$ (ب) $2^{1,25}$ (پ) $3^{\frac{2}{3}}$

پاسخ:

از روی نمودار $3^{1-\sqrt{2}} \rightarrow 3^{1-\sqrt{2}} = 0,7$ ماشین حساب $\Rightarrow 3^{1-\sqrt{2}} = 0,634$ الف)

از روی نمودار $2^{1,25} \rightarrow 2^{1,25} = 2,2$ ماشین حساب $\Rightarrow 2^{1,25} = 2,378$ ب)

از روی نمودار $3^{\frac{2}{3}} \rightarrow 3^{\frac{2}{3}} = 5,1$ ماشین حساب $\Rightarrow 3^{\frac{2}{3}} = 5,196$ پ)

۵ الف) سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$, $3^{2,5}$ پیدا کنید.

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

پ) اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آنگاه چه رابطه‌ای بین x, y, z برقرار است؟ ($a > 1$)

پاسخ: الف)

$$\sqrt{10} \approx 3,16 \Rightarrow 2,5 < 2,6 < 2,7 < 3 < \sqrt{10} \Rightarrow 3^{2,5} < 3^{2,6} < 3^{2,7} < 3^3 < 3^{\sqrt{10}}$$

ب) باید پایه‌ها را در دو طرف نامعادله یکسان کنیم.

$$4^{2x-1} > \frac{1}{1024} \Rightarrow (2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 > -10$$

$$\Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$$

$$a^x > a^y > a^z \xrightarrow{a>1} x > y > z$$

۶ داروها در بدن با ادرار دهن می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10(0.8)^t$ به دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

پاسخ:

$$\text{الف) } t = 8 \Rightarrow A(8) = 10(0.8)^8 = 1.677mgr$$

$$\text{ب) } t = 0 \Rightarrow A(0) = 10(0.8)^0 = 10, t = 1 \Rightarrow A(1) = 10 \times (0.8) = 8$$

$$\text{مقدار دفع شده} = 10 - 8 = 2 \Rightarrow \frac{\text{مقدار دفع شده}}{\text{مقدار اولیه}} \times 100 = \frac{2}{10} \times 100 = 20$$

۷ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایش بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

پاسخ: الف) اگر جرم اولیه ۱۰۰ میلی‌گرم را M و جرم باکتری‌ها پس از t ساعت را با $m(t)$ نشان دهیم، داریم:

$$m(1) = 2M \quad \text{جرم پس از دو ساعت} \quad m(2) = 2m(1) = 2 \times 2M = 2^2 M$$

$$m(3) = 2m(2) = 2 \times 2^2 M = 2^3 M$$

$$m(t) = 2^t \cdot M \Rightarrow m(t) = 100 \times 2^t$$

به همین ترتیب داریم:

ب)

$$t = 20 \Rightarrow m(20) = 100 \times 2^{20} = 100 \times 1.048576 = 10485760 mgr$$

۸ عبارت درست را با \checkmark و عبارت غلط را با \times علامت بزنید.

لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.

تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.

اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد.

اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_{10} a < \log_{10} b$

پاسخ: مورد اول: نادرست \times مثال نقض: $\log_{(0.5)}(0.5) = 1$

مورد دوم: درست \checkmark

مورد سوم: درست \checkmark

مورد چهارم: نادرست \times تابع $y = \log x$ هیچگاه محور y ها را قطع نمی‌کند.

مورد پنجم: درست \checkmark

مورد ششم: نادرست \times

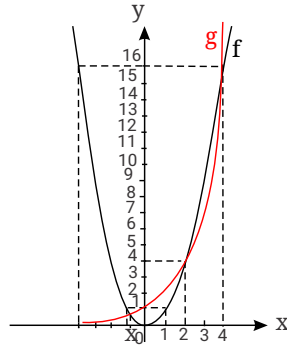
مثال نقض:

$$a = 100, b = 10 \Rightarrow \log_{10} a = 2, \log_{10} b = 1 \Rightarrow \log_{10} a > \log_{10} b$$

۹ نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

پاسخ:

- نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $x < x_0 \Rightarrow$
- نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x_0 < x < 2 \Rightarrow$
- نمودار f بالاتر از g قرار دارد. $2 < x < 4 \Rightarrow$
- نمودار g بالاتر از f قرار دارد. $x > 4 \Rightarrow$



۱۰ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$\log_{10} 0.01, \log_6 \frac{1}{6}, \log_2 \sqrt{2}, \log_3 \sqrt[3]{27}$$

پاسخ:

$$\log_{10} 0.01 = x \Rightarrow 10^x = 0.01 = 10^{-2} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = -2$$

$$\log_6 \frac{1}{6} = x \Rightarrow 6^x = \frac{1}{6} = 6^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \log_6 \frac{1}{6} = -1$$

$$\log_2 \sqrt{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 \sqrt[3]{27} = x \Rightarrow 3^x = \sqrt[3]{27} = 3^{\frac{3}{3}} \Rightarrow x = \frac{3}{3} \Rightarrow \log_3 \sqrt[3]{27} = \frac{3}{3}$$

۱۱ الف) خط $y = 27$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.01)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

پاسخ: الف)

$$y = 27, y = 3^x \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

نقطه برخورد، نقطه $(3, 27)$ می‌باشد.

ب)

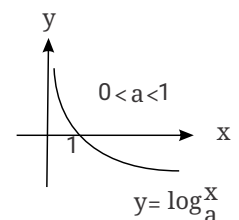
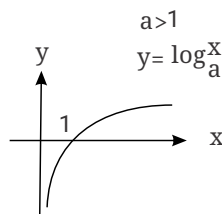
$$y = 10, y = (0.01)^x = 10 \Rightarrow (10^{-2})^x = 10$$

$$\Rightarrow 10^{-2x} = 10 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

نقطه برخورد، نقطه $(-\frac{1}{2}, 10)$ می‌باشد.

۱۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.

پاسخ:



در تابع $y = \log_a x$ با شرط $a > 1$ مقدار x با افزایش y هم افزایش می‌یابد ولی هنگامی که $0 < a < 1$ با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد.

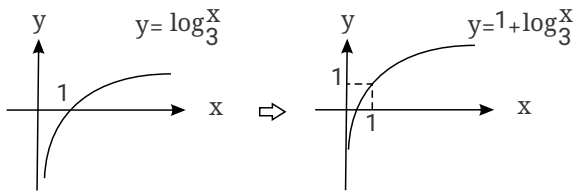
۱۳ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

پاسخ:

الف

$$y = 1 + \log_3 x$$

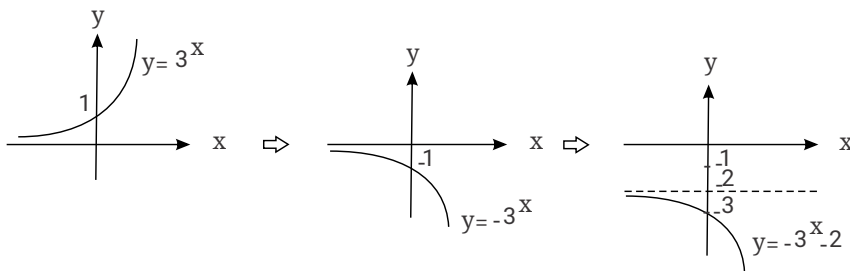
پاسخ:



ب

$$y = -3^x - 2$$

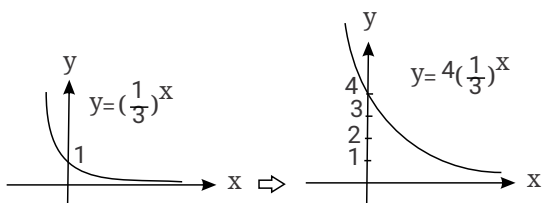
پاسخ:



ب

$$y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

پاسخ:



۱۴) گزینه‌های درست را با \checkmark و گزینه‌های نادرست را با \times علامت بزنید.

$$\log 5 = \log 3 + \log 2 \quad \square \quad \log_b a \times \log_a b = 1 \quad \square$$

پاسخ: $\log_b a \times \log_a b = 1$ درست است.

$\log 3 + \log 2 = \log(3 \times 2) = \log 6 \neq \log 5$: زیرا $\log 5 = \log 3 + \log 2$ نادرست است.

۱۵) عبارات زیر را ساده کنید. ($\log 3 \simeq 0,4771$, $\log 2 \simeq 0,301$).

پاسخ:

الف

$$\log(18 \times 375)$$

پاسخ:

$$\log(18 \times 375) = \log(3^2 \times 2 \times 5^3 \times 3) = \log(3^3 \times 2 \times 5^3)$$

$$= \log 3^3 + \log 2 + \log 5^3 = 3 \log 3 + \log 2 + 3 \log 5$$

$$= 3 \log 3 + \log 2 + 3(1 - \log 2) = 3 \log 3 - 2 \log 2 + 3$$

$$= 3 \times 0,4771 - 2 \times 0,301 + 3 = 3,8293$$

ب

$$\log \sqrt{0,75}$$

$$\log \sqrt{0,75} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2^2 = \frac{1}{2} \log 3 - \log 2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0,4771 - 0,301 = -0,06245$$

پ

$$\log_r \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\log_r \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}} = \log_r \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt[4]{2}} = \log_r \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}} = \log_r 2^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}} = \log_r 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} \log_r 2 = \frac{5}{4}$$

الف

$$(b \neq 1, a, b > 0) a^{\log_b a} = a$$

۱۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

پاسخ:

 پاسخ: نادرست $a^{\log_b a} = a \Rightarrow \log_b a = 1 \Rightarrow a = b$

 در حالت کلی ممکن است a و b برابر نباشند. پس این رابطه نادرست است.

ب

$$(d \neq 1, a, b, c, d > 0) \log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c$$

$$\log_d abc = \log_d (ab)c = \log_d ab + \log_d c = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad \text{درست} \quad \text{پاسخ:}$$

پ

$$\log x \log y = \log x + \log y$$

پاسخ: نادرست. ضرب دو عبارت در حالت کلی، با مجموع آنها برابر نمی‌باشد.

ت لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

 پاسخ: نادرست. به عنوان مثال $\log_2 \frac{1}{2}$ عددی منفی است. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$
۱۷ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

پاسخ:

$$f(x) = \log_a x \xrightarrow{(\frac{1}{2}, -4) \in f} -4 = \log_a \frac{1}{2} \Rightarrow -4 = \log_a 2^{-1} = -\log_a 2 \Rightarrow \log_a 2 = 4 \Rightarrow a^4 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$$

۱۸ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند، چقدر

است؟

پاسخ:

$$T = 30, M = 128 \text{ mgr} \Rightarrow m(t) = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 128 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{30}}$$



$$t = 300 \rightarrow m(300) = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{300}{2}} = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{150} = \frac{128}{1024} = 0,125 mgr$$

۱۹) نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به $0,01$ گرم کاهش می یابد؟

پاسخ: الف)

$$M = 1, T = 4 \Rightarrow m(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}}$$

ب)

$$m(t) = 0,01 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{4}}} = 0,01 = \frac{1}{100} \Rightarrow 2^{\frac{t}{4}} = 100$$

$$\Rightarrow \log 2^{\frac{t}{4}} = \log 100 \Rightarrow \frac{t}{4} \log 2 = \log 10^2 = 2 \Rightarrow t = \frac{8}{\log 2} \Rightarrow t = \frac{8}{0,301} = 26,57$$

۲۰) الف) جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود 5000 گرم می شود؟ ($\log 2 \simeq 0,301$)

پاسخ: الف)

$$m(t) = 2^t \Rightarrow m = 2^t \Rightarrow t = \log_2 m \Rightarrow m = \log_2 t \Rightarrow m^{-1}(t) = \log_2 t$$

تابع وارون این تابع یعنی $m^{-1}(t) = \log_2 t$ که جرم باکتری‌ها برابر t گرم می باشد را به دست می آورد.

ب)

$$m^{-1}(5000) = \log_2 5000 = \log_2 5 \times 10^3 = \log_2 5 + 3 \log_2 10 = \frac{\log 5}{\log 2} + \frac{3 \log 10}{\log 2}$$

$$= \frac{1 - \log 2}{\log 2} + \frac{3}{\log 2} = \frac{1 - 0,301}{0,301} + \frac{3}{0,301} = 2,32 + 9,96 = 12,28$$

۲۱) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

پاسخ:

الف)

$$\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$$

پاسخ:

$$\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0 \Rightarrow 2 \log_4 m - \log_4 m = 3 \Rightarrow \log_4 m = 3$$

$$\Rightarrow m = 4^3 \Rightarrow m = 64 \text{ قابل قبول}$$

ب)

$$\log_7(12b - 21) - \log_7(b^2 - 3) = 2$$

پاسخ:

$$\log_7(12b - 21) - \log_7(b^2 - 3) = 2 \Rightarrow \log_7\left(\frac{12b - 21}{b^2 - 3}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{12b - 21}{b^2 - 3} = 7^2 = 49 \Rightarrow 49b^2 - 12 = 12b - 21 \Rightarrow 49b^2 - 12b - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 49b^2 - 12b + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \times 49 \times 9 = 144 - 1764 = 0$$

$$\Rightarrow (2b - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$b = \frac{3}{2}$ غیر قابل قبول است زیرا عبارت مقابل لگاریتم منفی می شود. پس معادله جواب ندارد.

پ

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^r - 1) = -1$$

پاسخ:

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^r - 1) = -1 \Rightarrow x^r - 1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10 \Rightarrow x^r = 11 \Rightarrow x = \pm\sqrt{11}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.