جزوه : حسابان

فصل : پنجم

سایت : مرجع آموزشی فرخی

مرجع آموزشی فرخی

۱ تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases}-۱ & x\in\mathbb{Z}\\ ۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

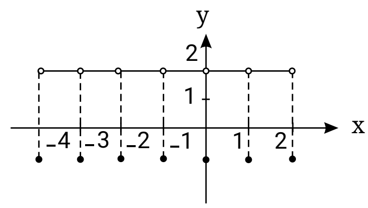
الف) نمودار g را در فاصلهٔ $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۱} g(x) \qquad \lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)$$

پاسخ: الف)

$$g(x)=\begin{cases}-۱ & x\in\mathbb{Z}\\ ۲ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to\sqrt{۲}} g(x)=۲$$

۲ با تکمیل هریک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ مورد نظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۳x+۴)=\dots$

x	-۱	$-۰٫۹$	$-۰٫۱$	$-۰٫۰۱$	$\to$	۰	$\leftarrow$	$۰٫۰۰۱$	$۰٫۰۱$	$۰٫۱$	$۰٫۵$	۱
$f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\to$	$?$	$\leftarrow$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\dots \qquad f(x)=\begin{cases}x-۴ & x\neq -۱\\ ۳ & x=-۱\end{cases}$

x	-۲	$-۱٫۵$	$-۱٫۱$	$-۱٫۰۱$	$-۱٫۰۰۱$	$\to$	-۱	$\leftarrow$	$-۰٫۹۹۹$	$-۰٫۹۹$	$-۰٫۹$	$-۰٫۸$
$f(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\to$	$?$	$\leftarrow$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

پاسخ:

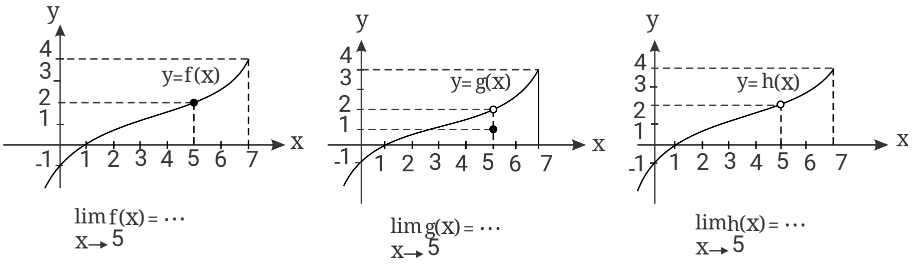
الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۳x+۴)=۴$

x	-۱	$-۰٫۹$	$-۰٫۱$	$-۰٫۰۱$	$\to$	۰	$\leftarrow$	$۰٫۰۰۱$	$۰٫۰۱$	$۰٫۱$	$۰٫۵$	۱
$f(x)$	۷	$۶٫۷$	$۴٫۳$	$۴٫۰۳$	$\to$	۴	$\leftarrow$	$۳٫۹۹۷$	$۳٫۹۷$	$۳٫۷$	$۲٫۵$	۱

ب) $f(x)=\begin{cases}x-۴ & x\neq -۱\\ ۳ & x=-۱\end{cases} \qquad \lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۵$

x	-۲	$-۱٫۵$	$-۱٫۱$	$-۱٫۰۱$	$-۱٫۰۰۱$	$\to$	-۱	$\leftarrow$	$-۰٫۹۹۹$	$-۰٫۹۹$	$-۰٫۹$	$-۰٫۸$
$f(x)$	-۶	$-۵٫۵$	$-۵٫۱$	$-۵٫۰۱$	$-۵٫۰۰۱$	$\to$	-۵	$\leftarrow$	$-۴٫۹۹۹$	$-۴٫۹۹$	$-۴٫۹$	$-۴٫۸$

۳ نمودار سه تابع f, g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ ۵ $x=$ مشخص کنید.



پاسخ:

$$\lim_{x\to ۵} f(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۵} g(x)=۲ \quad , \quad \lim_{x\to ۵} h(x)=۲$$

۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنهٔ تابع f را به دست آورید.

ب) دامنهٔ تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰٫۹ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ ۱ $x=$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست ۱ $x=$ چطور؟

پاسخ: الف)

$$f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} \Rightarrow ۱-x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۱ \Rightarrow |x|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$
$$x\neq ۰ \Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$$

ب) دامنهٔ تابع شامل همسایگی محذوف نقطهٔ ۰ $x=$ می‌باشد.

پ) بله تابع در همسایگی ۰٫۹ مثلاً در بازهٔ $(۰٫۸, ۰٫۹۹)$ تعریف شده است.

ت) طبق دامنه، تابع در همسایگی چپ ۱ $x=$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست ۱ $x=$ تعریف نشده است.

۵ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \\ x+۳ & x<۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

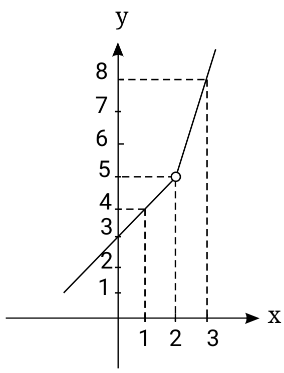
الف) آیا تابع f در نقطهٔ ۲ $x=$ تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x\to ۲} f(x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ: الف) تابع f در نقطهٔ ۲ $x=$ تعریف نشده است.

ب)

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ \quad x>۲ & \begin{array}{c|c} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۸ \end{array} \\ x+۳ \quad x<۲ & \begin{array}{c|c} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{array} \end{cases}$$



x	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲٫۰۰۱	۲٫۰۱	۲٫۱
$f(x)$	۴٫۹	۴٫۹۹	۴٫۹۹۹	$\rightarrow$	۵	$\leftarrow$	۵٫۰۰۳	۵٫۰۳	۵٫۳

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۵$$

۶ اگر بازهٔ $(x-۱, ۲x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

پاسخ:

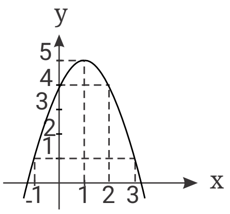
$$۲ \in (x-۱, ۲x+۳) \Rightarrow x-۱ < ۲ < ۲x+۳$$

$$\left.\begin{array}{l} x-۱ < ۲ \Rightarrow x < ۳ \\ ۲x+۳ > ۲ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -\frac{۱}{۲} < x < ۳$$

۷ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را در صورت وجود، در نقاط داده‌شده به دست آورید.

پاسخ:

الف

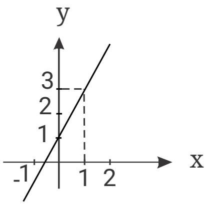


$$\lim_{x\to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴)$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴) = ۴$$

ب

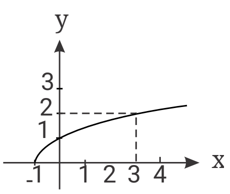


$$\lim_{x\to ۱} (۲x + ۱)$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱} (۲x + ۱) = ۳$$

پ

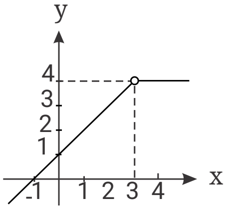


$$\lim_{x\to -۱} \sqrt{x+۱}$$

پاسخ:

$\lim_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$ حد ندارد.

ت



$$f(x)=\begin{cases}4 & x>3\\ x+1 & x<3\end{cases}$$
$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=4$$

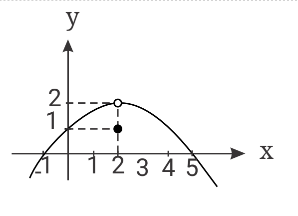
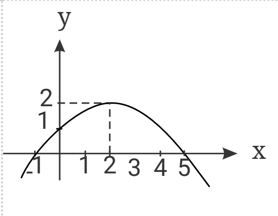
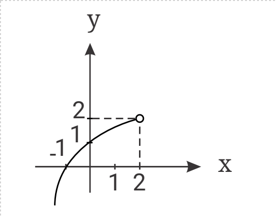
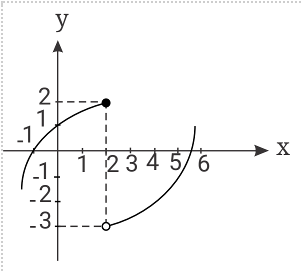
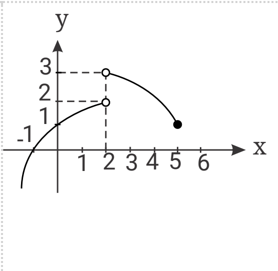
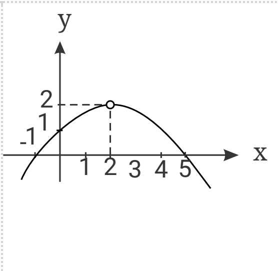
۸ با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطهٔ $x=2$ چه می‌توان گفت؟

پاسخ:

$$f(x)=\frac{x}{[x]-2}\quad [x]-2=0\to [x]=2\Rightarrow 2\le x<3$$
$$D_f=\mathbb{R}-[2,3)\Rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$$

چون تابع در همسایگی راست $x=2$ تعریف نشده است، پس حد راست ندارد.

۹ با توجه به نمودارهای توابع داده‌شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.

		
(الف)	(ب)	(پ)
		
(ت)	(ث)	(ج)

تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

پاسخ: پاسخ: مورد اول ← تابع (ج)

مورد دوم ← تابع (الف)

مورد سوم ← توابع (پ)، (ت) و (ث)

مورد چهارم ← تابع (ب)

مورد پنجم ← تابع (ج)

مورد ششم ← توابع (ت)، (ث)

۱۰ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۰ \\ x^۲+۲x & x<۰ \end{cases}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد .... نزدیک می‌شوند، بنابراین : $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = ...$

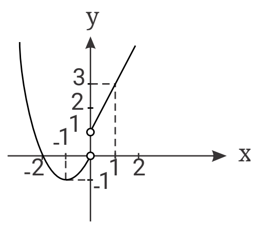
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد؟ چرا؟

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱\ ,\ x>۰ \to \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۱ \\ ۳ \end{vmatrix} \\ x^۲+۲x\ ,\ x<۰ \to \quad \text{راس} \quad x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲}{۲}=-۱ \Rightarrow y=۱-۲=-۱ \Rightarrow \quad \text{راس} \quad \begin{vmatrix} -۱ \\ -۱ \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$x^۲+۲x=۰ \Rightarrow x(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۰, x=-۲$$



الف) صفر، $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۰$

ب) اگر x از راست به صفر نزدیک شود، $f(x)$ به یک نزدیک می‌شود، پس: $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱$

پ) تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست تابع در نقطه $x=۰$ دو عدد متفاوت هستند.

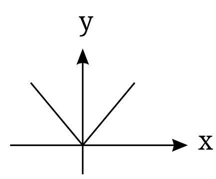
۱۱ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟

پاسخ: الف)

$\lim\limits_{x\to ۰}|x|=۰$



ب) اگر $a>۰$ باشد، x در یک همسایگی a مثبت است و داریم:

$$\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}x=a=|a|$$

و اگر $a<۰$ باشد، x در یک همسایگی a منفی است و داریم:

$$\lim_{x\to a}|x|=\lim_{x\to a}(-x)=-a=|a|$$

پس: $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$

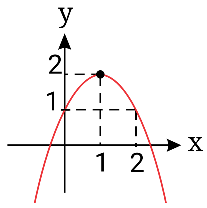
۱۲) با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-۱)^{۲} + ۲$ حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} [f(x)]$ ب) $[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)]$

([ ] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ:

$f(x) = -(x-۱)^{۲} + ۲ \quad \begin{vmatrix} x = ۱ \\ y = ۲ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x = ۲ \\ y = ۱ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x = ۰ \\ y = ۱ \end{vmatrix}$



الف) زمانی که x به یک میل می‌کند، مقادیر تابع از پایین به ۲ نزدیک می‌شوند یعنی y ها با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کنند. پس:

$$\lim_{x\to ۱} [f(x)] = [۲^{-}] = [۲-\varepsilon] = ۱$$

ب) باید $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را یافته و از حاصل آن بصورت یک عدد مطلق براکت بگیریم.

$$[\lim_{x\to ۱} f(x)] = [۲] = ۲$$

۱۳) با توجه به دامنهٔ تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x^{۲} - x}$ در نقطهٔ $x = ۱$ چه می‌توان گفت؟

پاسخ:

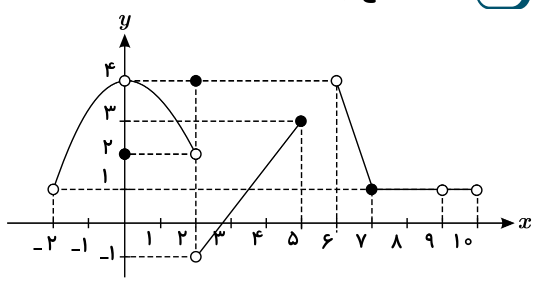
$$f(x) = \sqrt{x^{۲} - x} \Rightarrow x^{۲} - x \geq ۰$$

x		0		1	
$x^2 - x$	+ ج	ج	−	ج	+ ج

$$D_f = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty)$$

چون تابع در همسایگی چپ نقطهٔ $x = ۱$ تعریف نشده است پس حد چپ ندارد.

۱۴) نمودار تابع f به‌صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ ت) $\lim\limits_{x\to ۶^{-}} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to (-۲)^{+}} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۸} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۹} f(x)$

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۴$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x) = ۲ \,,\, \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ حد ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) =$ تابع در همسایگی راست ۵ تعریف نشده پس حد ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to ۶^{-}} f(x) =$ تابع در همسایگی چپ ۶ تعریف نشده پس حد ندارد

ث) $\lim\limits_{x\to (-۲)^{+}} f(x) = ۱$

ج) $\lim\limits_{x\to ۸} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x\to ۹} f(x) = ۱$

۱۵ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

پاسخ:

$$L^- = \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{x^۲+[x]}{|x|} = \frac{(-۱)^۲+(-۲)}{|-۱|} = \frac{۱-۲}{۱} = -۱$$
$$L^+ = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} ۳x+b = -۳+b$$
$$L^+ = L^- \Rightarrow -۳+b=-۱ \Rightarrow b=۲$$

۱۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

پاسخ: تابع $f+g$ در a حد ندارد زیرا اگر فرض کنیم $h=f+g$ در a حدی برابر M داشته باشد یعنی $\lim\limits_{x\to a} h(x)=M$

چون f هم در a حدی برابر N دارد یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=N$ داریم:

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)-f(x)) = \lim_{x\to a}(h(x)-f(x))$$
$$= \lim_{x\to a} h(x) - \lim_{x\to a} f(x) = M-N$$

یعنی g در a حد دارد و این خلاف فرض است، پس تابع $h=f+g$ نمی‌تواند در a حد داشته باشد.

۱۷ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=۳x+۲ \quad , \quad y=x^۲-۱ \quad , \quad y=[x]-۱ \quad , \quad y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$$

الف) مقدار حد هریک از توابع فوق در $x=۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f و g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=\ldots$	$g(x)=\ldots$	$f(x)+g(x)=\ldots$
تابع $f\cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\ldots$	$g(x)=\ldots$	$f(x)\cdot g(x)=\ldots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=\ldots$	$g(x)=\ldots$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\ldots$
تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\ldots$		$f^۲(x)=\ldots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\ldots$		$\sqrt{f(x)=\ldots}$

پاسخ: الف)

$$y=۳x+۲ \Rightarrow \lim_{x\to۱}(۳x+۲)=۳+۲=۵$$
$$y=x^۲-۱ \Rightarrow \lim_{x\to۱}(x^۲-۱)=۱-۱=۰$$
$$y=[x]-۱ \Rightarrow \begin{cases}L^+=\lim_{x\to۱^+}[x]-۱=۱-۱=۰\\ L^-=\lim_{x\to۱^-}[x]-۱=۰-۱=-۱\end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$
$$y=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}L^+=\lim_{x\to۱^+} y=۲\\ L^-=\lim_{x\to۱^-} y=-۲\end{cases} \Rightarrow \text{حد ندارد}$$

هر سه تابع f و g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)+g(x)=x^۲+۳x+۱$
تابع $f\cdot g$ در ۱ حد دارد، اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-۱$	$g(x)=x^۲-۱$	$f(x)\cdot g(x)=(x^۲-۱)([x]-۱)$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=۳x+۲$	$g(x)=[x]-۱$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳x+۲}{[x]-۱}$
تابع $f^۲$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۲ & x>۱\end{cases}$		$f^۲(x)=۴, x\neq ۱$
تابع f در ۱ حد دارد اما $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^۲-۱$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^۲-۱}$

۱۸ فرض کنید f یک تابع باشد به‌طوری‌که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۳$. آیا می‌توان گفت f حتما تابع ثابت ۳ است؟

پاسخ: خیر الزاماً تابع f تابع ثابت نمی‌باشد. مثلا تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=(x-۱)(x-۲)+۳\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=۳, \lim_{x\to ۲} f(x)=۳$$

f تابع ثابت نمی‌باشد.

۱۹ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{x^۲-۱}=۴$

پاسخ: چون تابع g در $x=۲$ باید حد داشته باشد پس داریم:

$$\frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۱)}=۴\Rightarrow \frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{۳}=۴\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=۱۲$$

تابع g باید تابعی باشد که در $x=۲$ حدی برابر ۱۲ داشته باشد مانند:

$$g(x)=۶x\Rightarrow \lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲} ۶x=۱۲$$

۲۰ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

پاسخ: چون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ یعنی f در نقطهٔ $x=a$ حد دارد پس طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=L-L=۰$$

عکس این مطلب هم صحیح است یعنی با فرض $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)=\lim_{x\to a}(f(x)-L)+\lim_{x\to a} L=۰+L=L$$

۲۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

پاسخ:

الف

$$\lim_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^۳$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^۳=(\sqrt{۹}-۹)^۳=(۳-۹)^۳=(-۶)^۳=-۲۱۶$$

ب

$$\lim_{x\to -۱}(-۶x^۷-۴x^۲+۵)$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -۱}(-۶x^۷-۴x^۲+۵)=-۶(-۱)^۷-۴(-۱)^۲+۵=۶-۴+۵=۷$$

پ

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}}\frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^۳+۱)}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -\frac{5}{3}} \frac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)(-5+5)}{(-5+6)((-\frac{5}{3})^3+1)} = \frac{(-\frac{5}{3}+\pi)\times 0}{1(-\frac{125}{27}+1)} = 0$$

ت

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

ث

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{2}} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

ج

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x+\cos x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x+\cos x} = \frac{\sin 0}{x+\cos 0} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

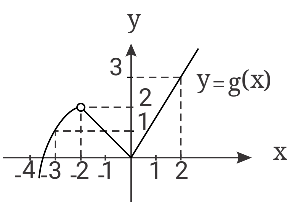
چ

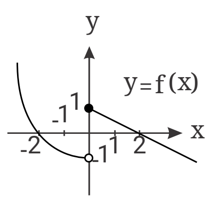
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x-\pi} = \frac{\left|\cos\frac{\pi}{2}\right|}{\frac{\pi}{2}-\pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

۲۲ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها مقدار حدهای زیر را بیابید.





پاسخ:

الف

$$\lim_{x\to -2} (2g(x)-f(x))$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -۲}(۲g(x)-f(x)) = ۲\lim_{x\to -۲} g(x) - \lim_{x\to -۲} f(x) = ۲\times ۲ - ۰ = ۴$$

ب

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}\begin{cases}\lim_{x\to ۰^+}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to ۰^+} g(x)}{\lim_{x\to ۰^+} f(x)} = \frac{۰}{۱} = ۰\\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to ۰^-} g(x)}{\lim_{x\to ۰^-} f(x)} = \frac{۰}{-۱} = ۰\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)} = ۰$$

پ

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -۳} -۳\sqrt{g(x)} = -۳\sqrt{\lim_{x\to -۳} g(x)} = -۳\sqrt{۱} = -۳$$

ت

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)} = ۲\sqrt[۳]{\lim_{x\to ۲} g(x)} = ۲\sqrt[۳]{۳}$$

۲۳ اگر $f(x) = \frac{x+۱}{۲x^۲ - x - ۱}$ و $g(x) = \frac{۲x+۱}{x}$، حاصل $\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)\cdot g(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\left(\frac{x+۱}{۲x^۲ - x - ۱}\times\frac{۲x+۱}{x}\right) = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{(x+۱)(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x-۱)x}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{x+۱}{(x-۱)x} = \frac{-\frac{۱}{۲}+۱}{(-\frac{۱}{۲}-۱)(-\frac{۱}{۲})} = \frac{\frac{۱}{۲}}{(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۱}{۲})} = \frac{۲}{۳}$$

۲۴ مقدار حدهای زیر را بیابید.

پاسخ:

الف

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲ + x - ۱}{۳x^۲ + ۳x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲ + x - ۱}{۳x^۲ + ۳x} = \lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x-۱)}{۳x(x+۱)} = \lim_{x\to -۱}\frac{۲x-۱}{۳x} = \frac{-۲-۱}{-۳} = ۱$$

ب

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[x]-۸}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲-۸}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x^۲-۴)}{x-۲}$$
$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} ۲(x+۲) = ۲\times ۴ = ۸$$

پ

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴} \times \frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{x+۲-۴}{(x-۲)(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)} = \frac{۱}{۴\times ۴} = \frac{۱}{۱۶}$$

ت

$$\lim_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}} \times \frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}} = \lim_{x\to ۴} \frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲(۴-x)(۲+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۴} \frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۲(۲+\sqrt{x})} = \frac{۳+۳}{۲\times ۴} = \frac{۳}{۴}$$

ث

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x} \times \frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱+x-۱+x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{x(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲}{(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})} = \frac{۲}{۱\times ۲} = ۱$$

ج

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x^۲-x)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{x(\sqrt{x}+۱)}{x+\sqrt{x}} = \frac{۱\times ۲}{۲} = ۱$$

۲۵ مقدار حدهای زیر را بیابید.

پاسخ:

الف

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cos x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin x}{\cos x}\ ,\ x-\frac{\pi}{۲}=t\ ,\ x=\frac{\pi}{۲}+t\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\sin(\frac{\pi}{۲}+t)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t}{-\sin t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}(\frac{t}{۲})}{-۲\sin(\frac{t}{۲})\cos(\frac{t}{۲})}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\frac{t}{۲})}{-\cos(\frac{t}{۲})}=\frac{۰}{۱}=۰$$

ب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{۴}-\sin x\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پ

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{|۱-\cos x|}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{|۱-\cos x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{|۲\sin^{۲}(\frac{x}{۲})|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{۲\sin^{۲}(\frac{x}{۲})}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{۲(\frac{\sin(\frac{x}{۲})}{\frac{x}{۲}}\times\frac{x}{۲})^{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{۲(\frac{x}{۲})^{۲}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{\frac{۱}{۲}x^{۲}}=۲$$

ت

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲(۱-\cos ۲x)}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\times ۲\sin^{۲}x}{x\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴\sin x}{x}=۴\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۴\times ۱=۴$$

ث

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+۱}{x+\pi}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{۱+\cos x}{x+\pi}\ ,\ x+\pi=t\Rightarrow x=t-\pi\ ,\ t\to ۰$$

حسابان فصل ۵

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\cos(t-\pi)}{t}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\cos(\pi-t)}{t}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos t}{t}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲(\frac{t}{۲})}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{۲(\frac{\sin(\frac{t}{۲})}{\frac{t}{۲}}\times\frac{t}{۲})^۲}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲(\frac{t}{۲})^۲}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}t^۲}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱}{۲}t=۰$$

ج

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ ,\ x-a=t\ ,\ x=a+t\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(a+t)-\sin a}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin a\cos t+\cos a\sin t-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a(۱-\cos t)+\cos a\sin t}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a\times ۲\sin^۲(\frac{t}{۲})+\cos a\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin a\times\frac{۱}{۲}t^۲+t\cos a}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{t(-\frac{t}{۲}\sin a+\cos a)}{t}=\lim_{t\to ۰}(-\frac{t}{۲}\sin a+\cos a)=\cos a$$

چ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}\ ,\ x-\frac{\pi}{۳}=t\ ,\ x=\frac{\pi}{۳}+t\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۶(\frac{\pi}{۳}+t)-۲\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۶t}=\frac{۱}{۶}$$

ح

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}\qquad \sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^۲\ ,\ t\to ۱$$

$$\lim_{t\to ۱}\frac{۲t^۲-۳t+۱}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)(۲t-۱)}{(t-۱)(t+۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{۲t-۱}{t+۱}=\frac{۱}{۲}$$

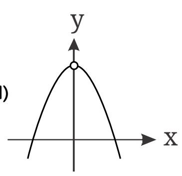
۲۶ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطهٔ ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

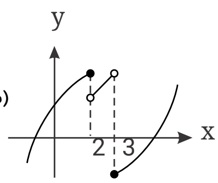
پ) ضابطهٔ یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

پاسخ:

الف)



ب)



پ) $f(x) = \dfrac{x}{x^{۲} - ۱} \Rightarrow$ تابع در دو نقطهٔ $x = \pm ۱$ ناپیوسته است.

۲۷ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

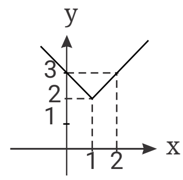
پاسخ:

الف

$$y = |x - ۱| + ۲$$

پاسخ:

$y = |x - ۱| + ۲ \Rightarrow$



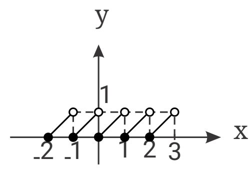
تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

ب

$$y = x - [x]$$

پاسخ:

$y = x - [x]$



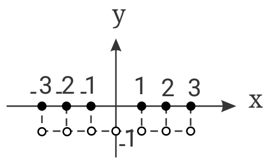
تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است و فقط پیوستگی راست دارد.

پ

$$y = [x] + [-x]$$

پاسخ:

$y = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



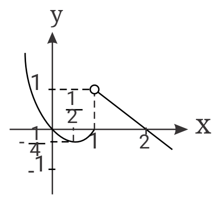
تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

ت

$$y = \begin{cases} x(x - ۱) & x \leq ۱ \\ -x + ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

پاسخ:

$$y = \begin{cases} x(x - ۱) \quad x \leq ۱ \to \text{راس} \left| \begin{matrix} \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۴} \end{matrix} \right. \\ -x + ۲ \quad x > ۱ \to \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right| \begin{matrix} ۲ \\ ۰ \end{matrix} \end{cases}$$



تابع در نقطهٔ $x = ۱$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی چپ دارد.

۲۸ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۱ - \cos x}{x^{۲}} & x > ۰ \\ b - ۱ & x = ۰ \\ x - ۲a & x < ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ پیوسته باشد.

پاسخ:

$$L^+ = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱-\cos x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}} \times \frac{x}{۲})^۲}{x^۲} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲\times\frac{x^۲}{۴}}{x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$L^- = \lim_{x\to ۰^-} (x-۲a) = -۲a\,,\ f(۰) = b-۱$$

$$\Rightarrow -۲a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}\ ,\ b-۱ = \frac{۱}{۲} \to b = \frac{۳}{۲}$$

۲۹ نشان دهید به‌ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x = ۰$ پیوسته نیستند.

پاسخ:

الف

$$f(x) = \begin{cases} x & x < ۰ \\ a & x = ۰ \\ ۲x+۱ & x > ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$$L^- = \lim_{x\to ۰^-} x = ۰\,,\ L^+ = \lim_{x\to ۰^+} (۲x+۱) = ۱\,,\ f(۰) = a$$

$$L^- = L^+ = f(۰) \Rightarrow a = ۰ = ۱$$

a نمی‌تواند هم صفر و هم یک باشد پس به‌ازای هیچ مقداری از a تابع پیوسته نمی‌باشد.

ب

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$$g(۰) = ۱\ \ \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{ax}{x} = a\,,\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$a = -a = ۱ \Rightarrow a = ۱\,,\ a = -۱$$

a نمی‌تواند هم ۱ و هم ۱− باشد، پس به‌ازای هیچ مقداری از a تابع پیوسته نمی‌باشد.

۳۰ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته باشد

پاسخ:

الف

$$f(x) = \begin{cases} ۲x-۱ & x < ۱ \\ a & x = ۱ \\ -x+۲ & x > ۱ \end{cases}$$

پاسخ:

$$L^- = \lim_{x\to ۱^-} (۲x-۱) = ۱\,,\ L^+ = \lim_{x\to ۱^+} (-x+۲) = ۱,\ f(۱) = a \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

ب

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x \neq ۱ \\ a & x = ۱ \end{cases}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲+x-۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} (x+۲) = ۳, g(۱) = a \Rightarrow \boxed{a = ۳}$$

پ

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1\\ [x]+a & x\geq 1\end{cases}$$

پاسخ:

$$h(1)=1+a\,,\; L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}[x]+a=1+a$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow 1+a=\frac{1}{2}\to\boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

ت

$$k(x)=([x]-a)[x]$$

پاسخ:

$$k(1)=(1-a)\times 1=1-a\,,\; L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}([x]-a)[x]=(1-a)\times 1=1-a$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}([x]-a)[x]=(0-a)\times 0=0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow\boxed{a=1}$$

۳۱ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

پاسخ: دامنهٔ تابع را می‌یابیم.

$$f(x)=2-\sqrt{3-x}\to 3-x\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow D_f=(-\infty,3]$$

هر بازهٔ بسته‌ای که زیر مجموعه دامنهٔ تابع باشد، جواب مسئله است مانند $[0,3]$

۳۲ تابع $f(x)=[x]$ در بازهٔ $(2,K)$ پیوسته است. حداکثر مقدار K چقدر است؟

پاسخ: با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ داریم: تابع در بازهٔ $(2,3)$ پیوسته است پس حداکثر K برابر ۳ است.