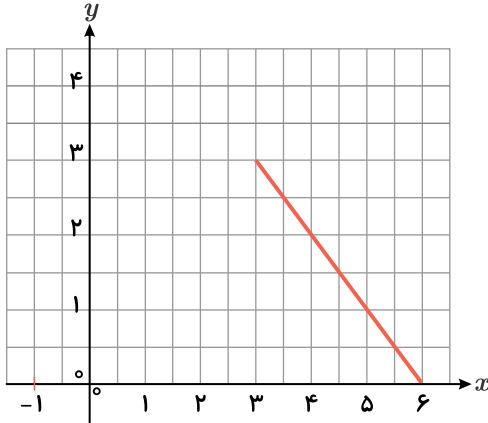




Farrokhi-Edu.com

مرجع آموزشی فرخی

۱ ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.



$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ \dots & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

پاسخ:

برای رسم نمودار مختصاتی در $-1 \leq x < 3$ با ضابطه $f(x) = x + 1$ نقاط $f(3)$ و $f(-1)$ را مشخص می‌کنیم و پاره خط مربوط به این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم (البته نقطه $f(3)$ را توخالی قرار می‌دهیم چون نقطه ۳ در دامنه ضابطه پایینی است).

$$f(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4 \Rightarrow (3, 4)$$

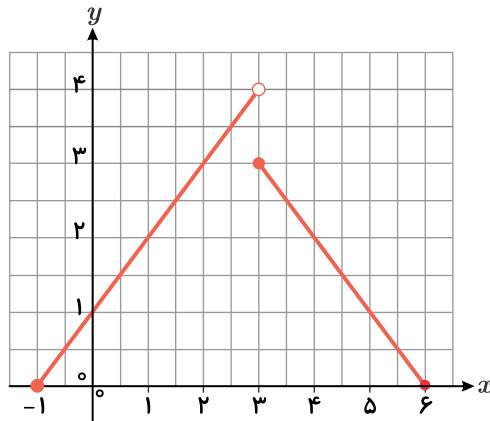
همچنین برای مشخص کردن ضابطه قسمت دوم معادله خطی که از دو نقطه $(3, 3)$ و $(6, 0)$ می‌گذرد را به دست می‌آوریم.

$$\text{شیب خط: } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1$$

با قرار دادن $m = -1$ (شیب خط) در معادله کلی خط $y = mx + b$ و قرار دادن یکی از نقاط عرض از مبدأ خط را به دست می‌آوریم.

$$y = mx + b \xrightarrow{m=-1} y = -x + b \xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند } (6, 0)} 0 = -6 + b$$

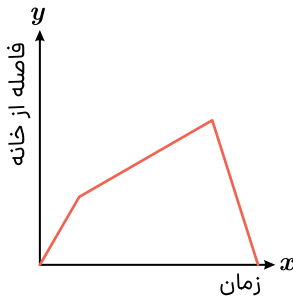
$$\Rightarrow b = 6 \rightarrow y = -x + 6$$



$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , -1 \leq x < 3 \\ -x + 6 & , 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

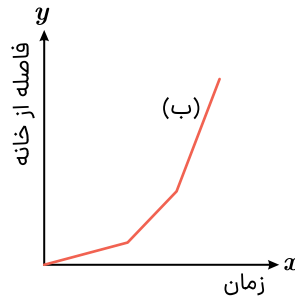
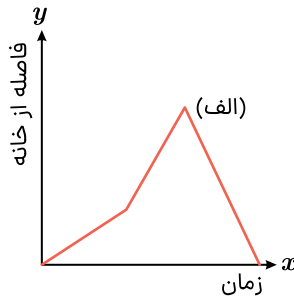
۲) نمودار روبه‌رو به کدام داستان مربوط است؟

الف) آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.
 ب) علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.
 ج) محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.



پاسخ: نمودار رسم شده، مربوط به داستان قسمت ج است.

نمودار مربوط به هر یک از داستان‌های الف و ب به صورت زیر است.



(تذکر: با توجه به اطلاعات محدود داستان‌ها، نمودارها تقریبی رسم شده‌اند.)

۳) در تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x < -1 \\ x^2 & , -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & , x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(2)$

ب) $f(3) + f(-1)$

ج) $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3})$

د) $f(\sqrt{2}) + f(5)$

پاسخ:

برای تعیین مقدار تابع به‌ازای هریک از مقادیر x لازم است ابتدا مشخص کنیم مقدار x در دامنه کدام ضابطه قرار دارد.

الف) $x = 2$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ است، بنابراین مقدار $f(2)$ را از ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

ب) $x = 3$ متعلق به دامنه $x > 2$ است، بنابراین مقدار $f(3)$ را با ضابطه سوم تعیین می‌کنیم و $x = -1$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ است، بنابراین مقدار $f(-1)$ را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(3) = 5$$

$$\Rightarrow f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow f(3) + f(-1) = 5 + 1 = 6$$

ج) $x = -\sqrt{2} \approx -1,4$ متعلق به دامنه $x < -1$ است، بنابراین مقدار $f(-\sqrt{2})$ را با ضابطه اول تعیین می‌کنیم و $x = \sqrt{3} \approx 1,7$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ است،

بنابراین مقدار $f(\sqrt{3})$ را با ضابطه دوم تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} = 3$$

$$\Rightarrow f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + 3$$

د) $x = \sqrt{2} \approx 1,4$ متعلق به دامنه $-1 \leq x \leq 2$ است، بنابراین مقدار $f(\sqrt{2})$ را از ضابطه دوم تعیین می‌کنیم و $x = 5$ متعلق به دامنه $x > 2$ است، بنابراین مقدار $f(5)$ را از

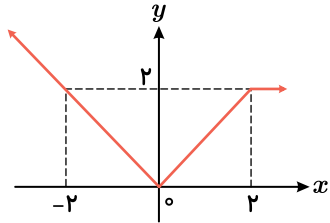
ضابطه سوم تعیین می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

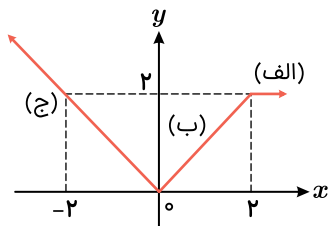
$$\Rightarrow f(5) = 5$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f(5) = 2 + 5 = 7$$

۴ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



پاسخ: نمودار را به ۳ قسمت (الف) و (ب) و (ج) تفکیک کرده و ضابطه هر یک را به طور جداگانه تعیین می‌کنیم.



الف) در قسمت (الف) به ازای تمام مقادیر x در دامنه تعریف، مقدار y ثابت و برابر ۲ است. (تابع ثابت)

ب) در قسمت (ب) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، همان مقدار برای y مشخص می‌شود. (تابع همانی، نیمساز ناحیه اول)

ج) در قسمت (ج) به ازای هر مقدار x در دامنه تعریف، مقدار قرینه آن برای y به دست می‌آید. (نیمساز ناحیه دوم)

بنابراین تابع سه ضابطه‌ای به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x \leq 2 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

۵) با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

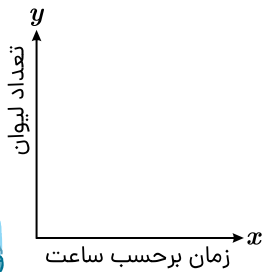
الف) به مناسبت روز درختکاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



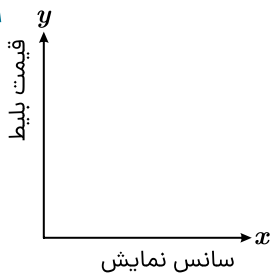
ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



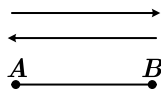
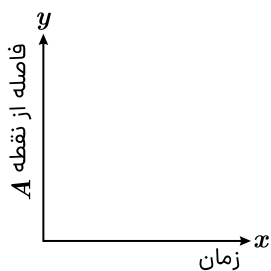
ج) شیر آبی که خراب است و در هر ساعت یک لیوان آب از آن چکه می‌کند.



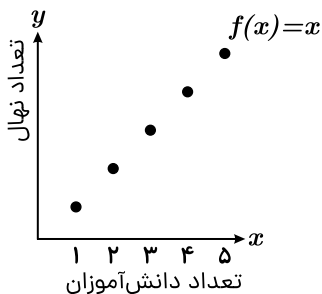
د) بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



ه) متحرکی با سرعت ثابت از نقطه A تا نقطه B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه A برمی‌گردد.



پاسخ: الف) از آنجایی که هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد، تعداد نهال‌های کاشته‌شده با تعداد دانش‌آموزان برابر است، بنابراین تابع موردنظر، تابع همانی است.

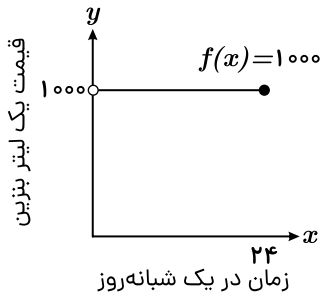


$$f(x) = x$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n \text{ (تعداد دانش‌آموزان)}\}$$

$$R_f = D_f$$

ب) هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز مبلغ ثابت ۱۰۰۰ تومان است، بنابراین تابع موردنظر، تابع ثابت است.

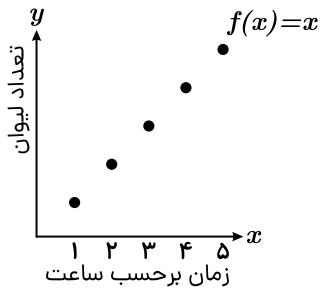


$$f(x) = 1000$$

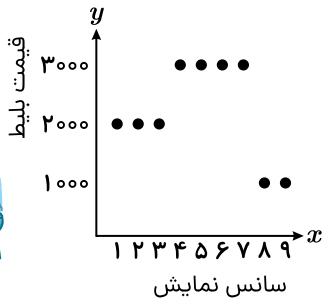
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 24\}$$

$$R_f = 1000$$

(ج) به ازای هر ساعت یک لیوان آب چکه می‌کند، پس یک ساعت ۱ لیوان، دو ساعت ۲ لیوان و ... پس تابع همانی است و داریم:



(د) با توجه به آنکه قیمت بلیت در مقاطع مختلف تغییر می‌کند، تابع چندضابطه‌ای است.



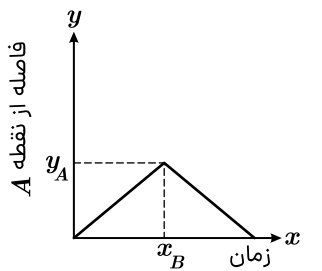
$$f(x) = \begin{cases} 2000 & , 1 \leq x \leq 3 \\ 3000 & , 4 \leq x \leq 7 \\ 1500 & , 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 9\}$$

$$R_f = \{1500, 2000, 3000\}$$

(ه) متحرک از زمان صفر و با فاصله صفر از نقطه A شروع به حرکت کرده است و با توجه به آنکه مسیر حرکت به صورت رفت و برگشت است، در رفت و برگشت هر کدام یک ضابطه خطی نوشته می‌شود پس تابع چندضابطه‌ای است.

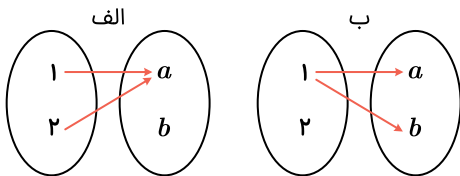
تذکر: چون مقدار سرعت و فاصله نقاط A و B مشخص نشده است فقط به رسم نمودار اکتفا کرده و ضابطه تابع را نمی‌نویسیم.



$$x_B = \text{زمان رسیدن دهنده به نقطه } B$$

$$y_B = \text{فاصله نقطه } B \text{ از نقطه } A$$

۶ کدام یک از ضابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

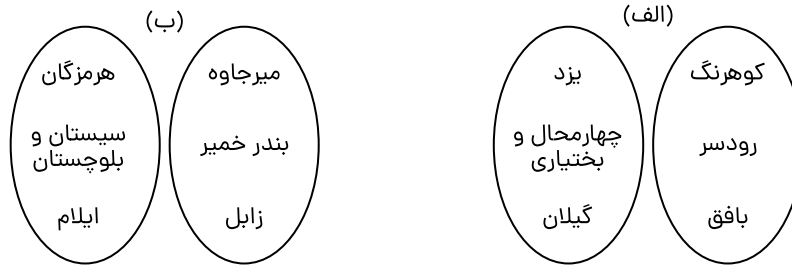


پاسخ: نمودار پیکانی (ب) نمایشگر تابع نیست، زیرا از یک عضو مجموعه اول (یعنی عدد ۱) دو پیکان به دو عضو متمایز مجموعه دوم (یعنی a و b) رسم شده است.

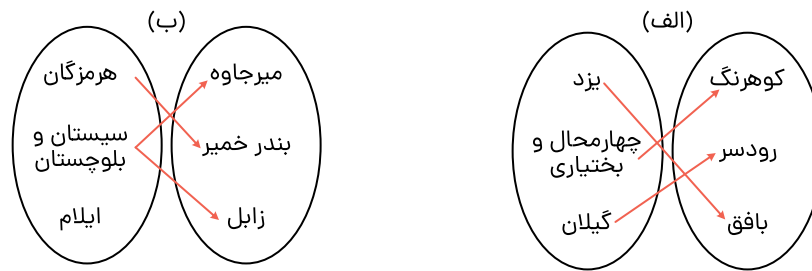
۷ ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته شده را کامل کنید.

پاسخ:

الف در نمودار ون‌های زیر با توجه به «رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.» با فلش مشخص کنید، سپس تعیین کنید کدام رابطه تعریف نشده تابع است؟

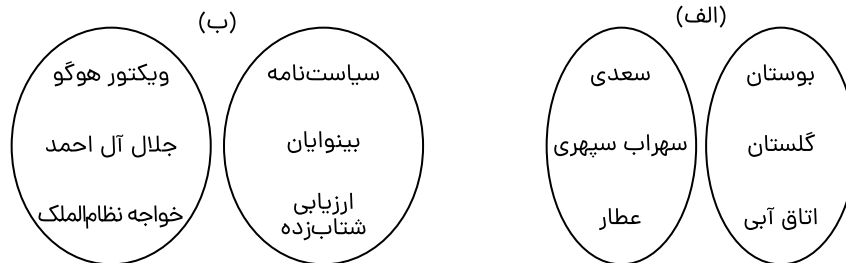


پاسخ:

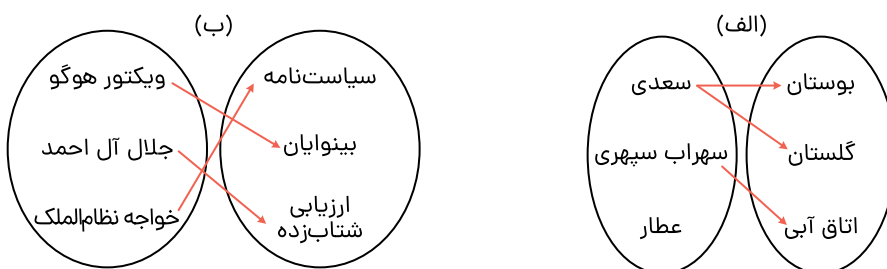


تابع است. از هر استان باید فقط یک پیکان خارج شود، چون پس از استان سیستان و بلوچستان دو پیکان خارج شده است، پس تابع نیست. همچنین از ایلام پیکان خارج نشده است.

ب رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



پاسخ:



از «سعدی» دو پیکان خارج شده و از «عطار» پیکان خارج نشده است، در نتیجه تابع نیست. از هر نویسنده فقط یک پیکان خارج شده، در نتیجه تابع است.

پ حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش پیکانی
	$\{(,), (,), (,)\}$	
	$\{(,), (,), (,)\}$	

با توجه به جدول بالا:

الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که

ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که

ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که

پاسخ:

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش پیکانی
	$\{(رودسر, گیلان), (کوه‌رنگ, گیلان), (بافق, یزد)\}$ {چهارمحال و بختیاری, یزد}	
	$\{(سیاست‌نامه, خواجه نظام‌الملک), (ارزیابی شتاب‌زده, جلال آل احمد), (بینوایان, ویکتور هوگو)\}$	

الف) نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که از هر عضو دامنه فقط یک پیکان خارج شود.

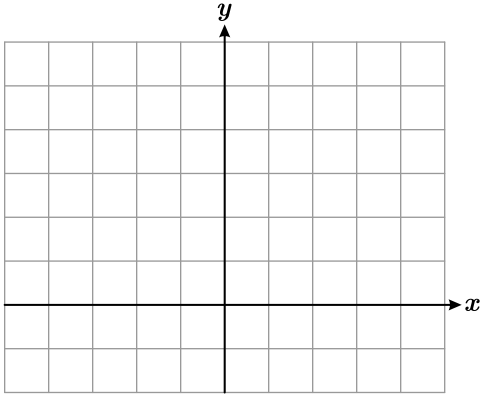
ب) نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشند.

ج) نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۸ کامل کنید:

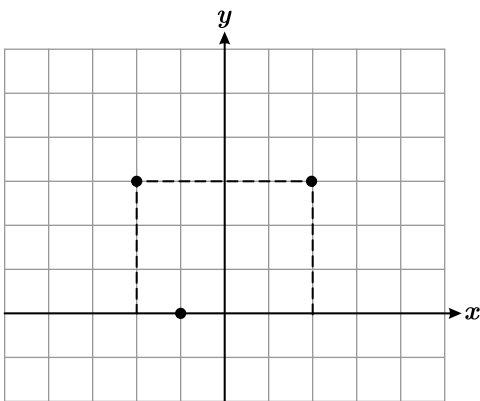
پاسخ:

الف



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad D_f = A = \{2, -1, -2\} \quad R_f = \{ \quad , \quad , \quad \}$$

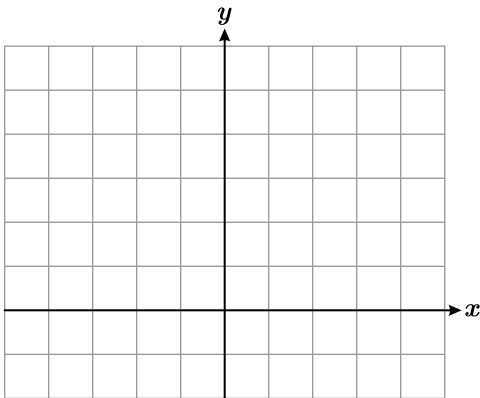
پاسخ:



$$R_f = \{3, 0\}$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3, \quad f(-1) = 1 - 1 = 0, \quad f(-2) = 4 - 1 = 3$$

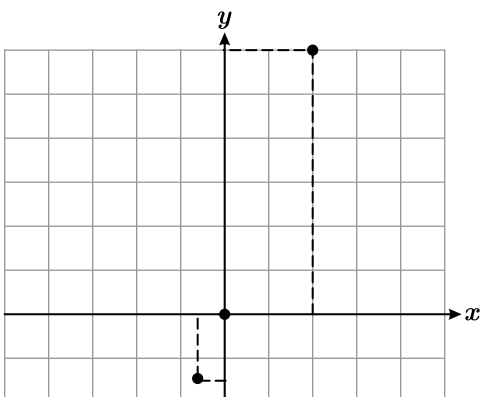
ب



$$f \text{ تابعی خطی از } A \text{ به } B \quad D_f = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 2\right\} \quad R_f = \left\{-\frac{3}{2}, 0, 6\right\}$$

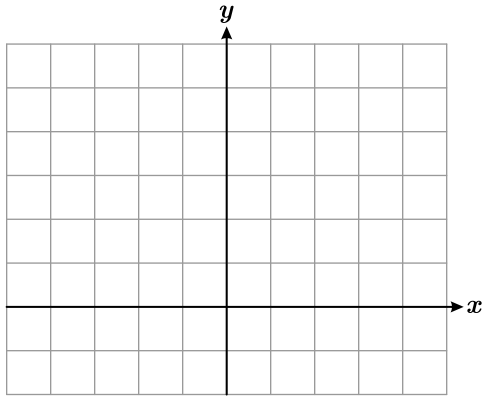
$$f(x) =$$

پاسخ:



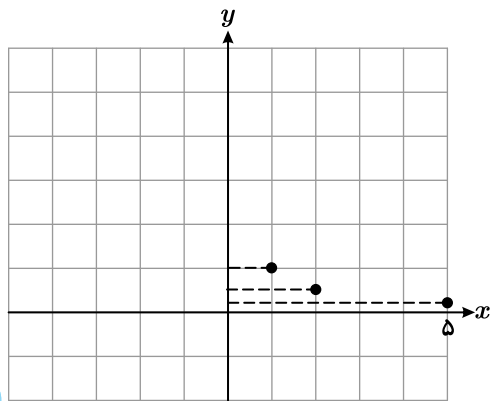
$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times 3 = -\frac{3}{2}, \quad 0 \times 3 = 0, \quad 2 \times 3 = 6 \Rightarrow f(x) = 3x$$

ب



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad D_f = \{ \quad , \quad , \quad \} \quad R_f = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right\}$$

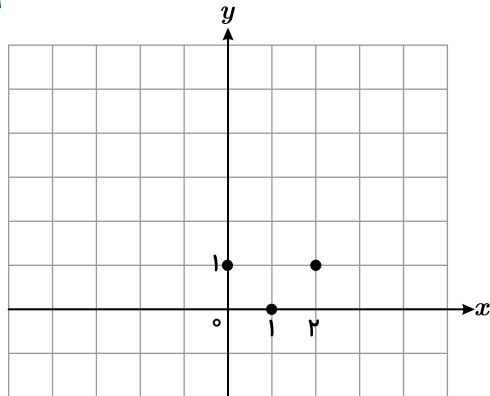
پاسخ:



$$D_f = \{1, 2, 5\}$$

$$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 5$$

ت



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases} \quad D_f = \{ \quad , \quad , \quad \} \quad R_f = \{ \quad , \quad \}$$

پاسخ: طول نقاط روی نمودار برابر D_f و عرض نقاط برابر R_f است.

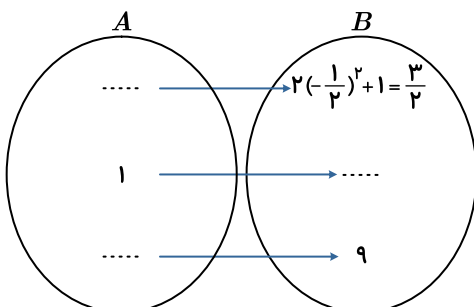
$$D_f = \{0, 1, 2\}$$

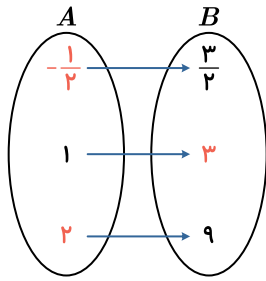
$$R_f = \{0, 1\}$$

۹ اگر $A = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$ و $F(x) = 2x^2 + 1$ باشد با توجه به نمایش تابع در هر قسمت جاهای خالی را کامل کنید.

پاسخ:

الف با توجه به نمایش پیکانی کامل کنید.





$$B = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$

جای خالی مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است.

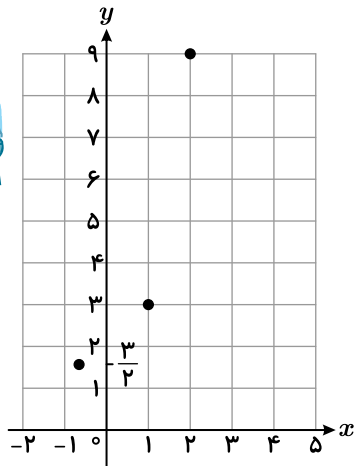
ب

با توجه به نمایش زوج مرتبی $f \left\{ \left(\dots, \frac{3}{2} \right), (1, \dots), (\dots, 9) \right\}$ آنگاه $R_f = \left\{ \frac{3}{2}, \dots, 9 \right\}$ و $D_f = \{ \dots, 1, \dots \}$

پاسخ:

$$f = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), (1, 3), (2, 9) \right\}$$

$$D_f = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}, R_f = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$



ب با توجه به نمایش مختصاتی آن دامنه و برد تابع را بنویسید.

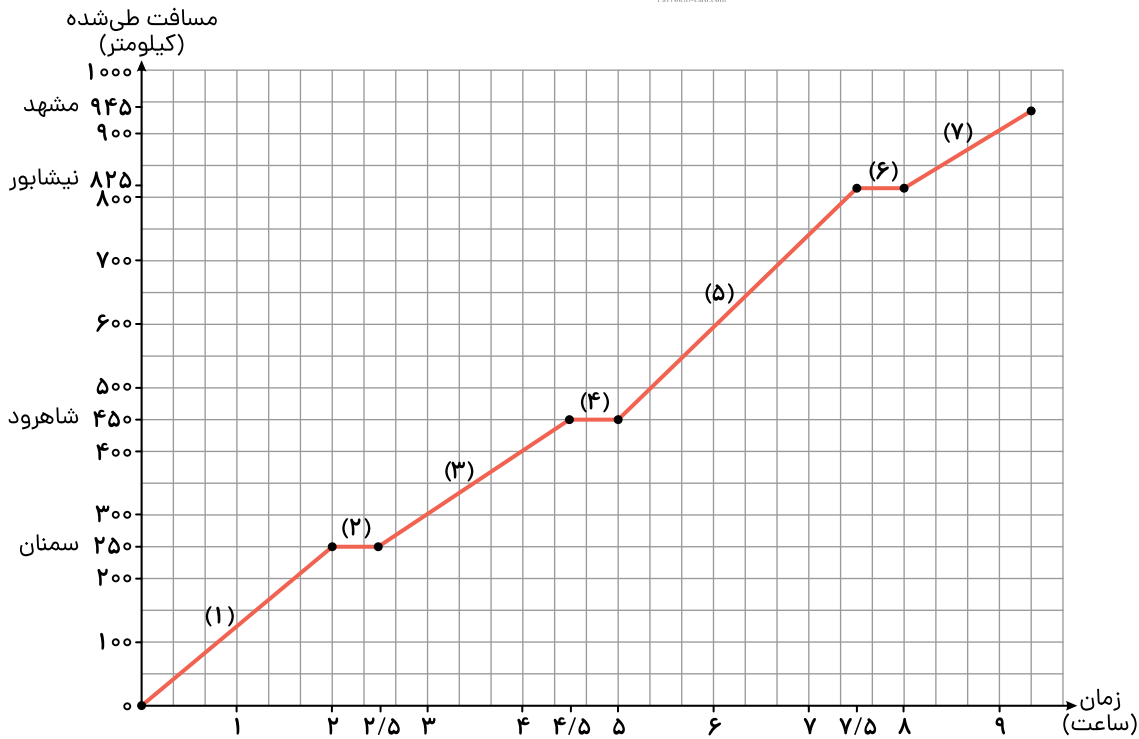
ب

پاسخ:

$$\text{دامنه تابع} \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

$$\text{برد تابع} \left\{ \frac{3}{2}, 3, 9 \right\}$$

۱۰ نمودار زیر قطاری را نشان می‌دهد که از تهران به مشهد رفته است.



پاسخ:

الف مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟

پاسخ: توقف در ایستگاه‌ها با تابع ثابت نمایش داده شده است.

ب ضابطه تابع «مکان - زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} 125x & , 0 \leq x < 2 \\ 250 & , 2 \leq x < 2,5 \\ 100x & , 2,5 \leq x < 4,5 \\ 450 & , 4,5 \leq x < 5 \\ 150x - 300 & , 5 \leq x < 7,5 \\ 825 & , 7,5 \leq x < 8 \\ 120x - 135 & , 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

پ اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می‌رسد؟

پاسخ:

$$150x - 300 = 945 \Rightarrow 150x = 1245 \Rightarrow x = 8,3$$

۱۱ در آمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

الف: قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است

ب: بر اساس هوشمندسازی

پاسخ: الف) تعداد کل خودروهای ورودی به توقفگاه از شنبه تا چهارشنبه برابر ۱۰۴۳۰ تا است.

$$\text{تومان} = 7,301,000 = 10,430 \times 700 = \text{تعداد خودرو} \times 700 = \text{هزینه}$$

ب) براساس هوشمندسازی در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

$$\text{شنبه} = 2660000 = 2660 \times 1000 = \text{دوشنبه} = 885000 \text{ و } 1770 \times 500 = \text{یکشنبه} = 0 = \text{شنبه}$$

$$\text{سه‌شنبه} = 2650000 = 610000 + 2040000 = 1220 \times 500 + 1360 \times 1500 = \text{سه‌شنبه}$$

$$\text{چهارشنبه} = 5330000 = 0 + 180 \times 500 + 270 \times 1000 + 350 \times 1500 + 490 \times 2000 + 570 \times 2500 + 680 \times 3000 = \text{چهارشنبه}$$

$$\text{کل درآمد} = 885000 + 2660000 + 2650000 + 5330000 = 11,525,000$$

در آمد فروشگاه در حالت هوشمندسازی شده، بیشتر است.

۱۲) اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه براساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

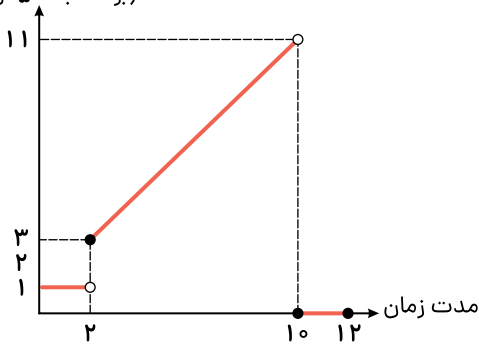
$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x + 1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور y ها معادل ۵۰۰ تومان است).

پاسخ:

برای خودروهایی که از ساعت ۸ تا ۱۰ صبح مانده اند ۱ واحد (معادل ۵۰۰ تومان) و خودروهایی که تا ساعت ۱۸ غروب مانده اند به طور مثال خودرویی که تا ساعت ۱۴ مانده (۶ - ۸ = ۱۴) یعنی $6 \times 500 = 3000$ تومان دریافت می شود و برای خودروهایی که بعد از ساعت ۱۸ خروج کرده اند رایگان است.

هزینه پارکینگ
(برحسب ۵۰۰ تومان)

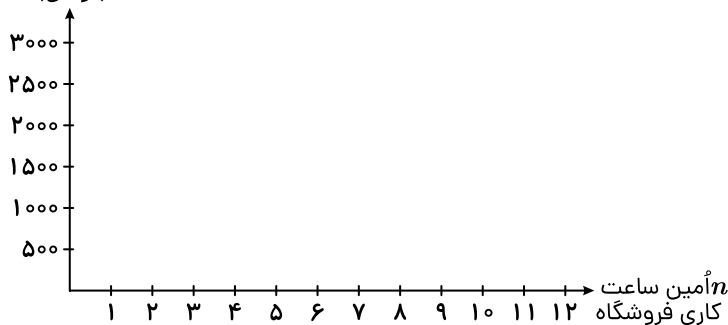


۱۳) چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول های ۱ و ۲ صفحه ۲۵ کتاب درسی ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n = 7 \\ 1000 & n = 8 \\ 1500 & n = 9 \\ 2000 & n = 10 \\ 2500 & n = 11 \\ 3000 & n = 12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n - 6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

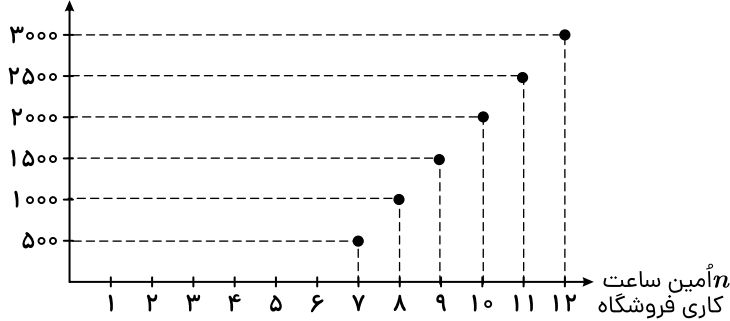
(۱) نمودار این تابع را رسم کنید:

هزینه توقفگاه
(تومان)



(۲) درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

پاسخ: (۱)

هزینه توقفگاه
(تومان)


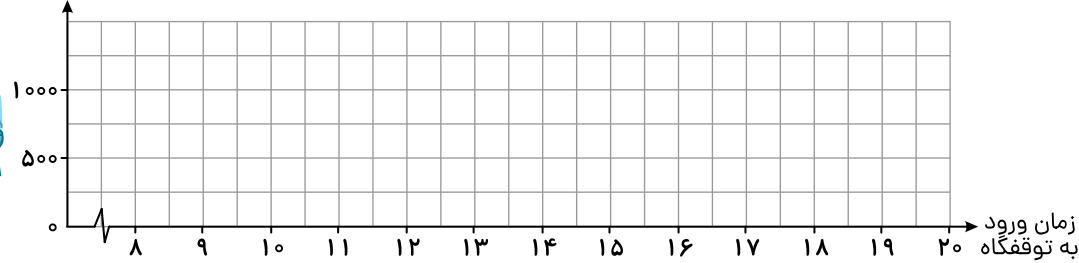
۲) درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

$$180 \times 500 + 270 \times 1000 + 350 \times 1500 + 490 \times 2000 + 570$$

$$\times 2500 + 670 \times 3000 = 5,300,000 \text{ تومان}$$

۱۴) با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

 توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

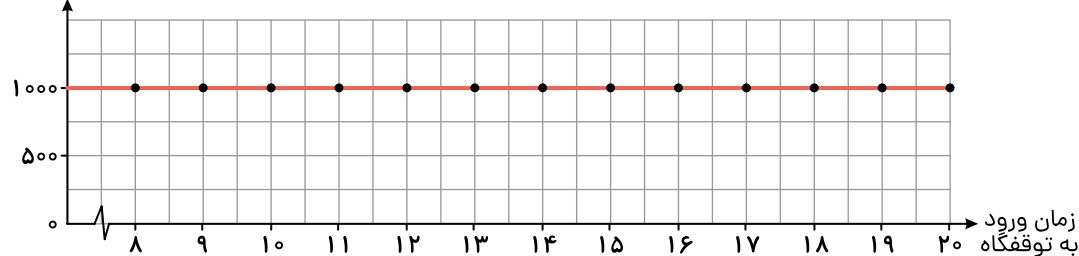
 هزینه توقفگاه
(تومان)


$$\begin{cases} C : A \rightarrow B \\ C(x) = \end{cases} \quad D = \{x \in R \mid \quad\quad\quad\} \quad R = \{ \quad\quad\quad \}$$

الف) دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟

ب) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

پاسخ:

 هزینه توقفگاه
(تومان)


$$\begin{cases} C : A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases} \quad D = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 20\} \quad R = \{1000\}$$

الف) دامنه تابع در روز دوشنبه زیر مجموعه اعداد حقیقی است و در روزهای شنبه و یکشنبه زیر مجموعه اعداد طبیعی است.

ب) به صورت خطی رسم می‌شود زیرا دامنه تابع از مجموعه اعداد حقیقی انتخاب می‌شود نه اعداد طبیعی.

 دقت کنید که در نمودار روزهای شنبه و یکشنبه n ساعت کاری فروشگاه دامنه است و در روز دوشنبه زمان ورود به توقفگاه دامنه است.

۱۵) اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m + t$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^r - 2n), (m - 4, 3), (m + n, t)\}$$

$$t = 3$$

$$n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n+1)(n-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -1 \notin N & \text{غ ق ق} \\ n = 3 \in N & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 3)\}$$

با توجه به $t = 3$ و $n = 3$ تابع را بازنویسی می‌کنیم:

چون f دو عضوی است، پس:

$$m - 4 = -1 \Rightarrow m = 3$$

یا

$$m - 4 = m + 3 \Rightarrow -4 = 3 \text{ غیرممکن}$$

یا

$$m + 3 = -1 \Rightarrow m = -4 \notin N \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\Rightarrow m + t = 3 + 3 = 6$$

۱۶) در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

(الف)

$$(2, n^2 - 3n + 4)$$

(ب)

$$(-1, n^2 - 4n + 2)$$

پاسخ: الف)

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \end{cases}$$

(ب)

$$-1 = n^2 - 4n + 2 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow (n-1)(n-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

۱۷) در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف) مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب) اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

پاسخ: الف)

$$f(a) = c \quad , \quad f(b) = c \quad \text{و} \quad f(a+b) = c$$

(ب)

$$c = c \times c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

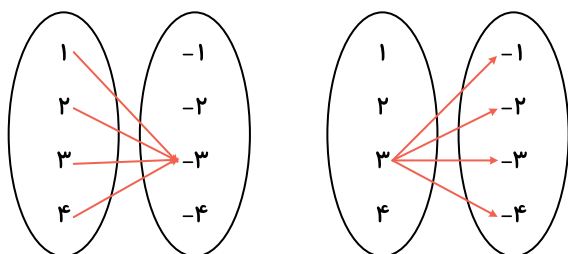
۱۸) اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

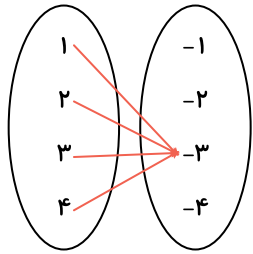
پاسخ:

$$a = 1 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 5$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

۱۹) کدام یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟





۲۰) کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

ب) اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آنگاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

ج) اگر f یک تابع ثابت باشد، آنگاه $f(kx) = kf(x)$.

پاسخ: الف) نادرست: زیرا می‌توان تابع $\{(1, 2), (2, 1)\}$ را در نظر گرفت که دامنه و برد یکسان دارد اما همانی نیست.

ب) درست: زیرا:

$$f(x) + f(-x) = x - x = 0$$

ج) نادرست می‌توان مثال زیر را در نظر گرفت

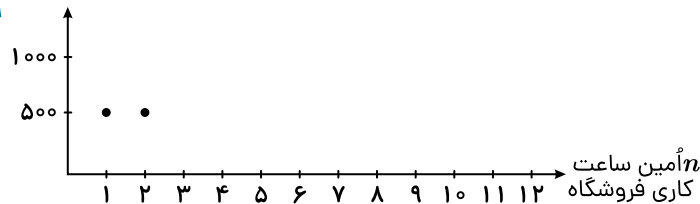
$$\begin{cases} f(x) = 5 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(kx) = 5, \quad kf(x) = 2 \times 5 = 10$$

تذکر (تساوی فوق فقط به‌ازای $k = 1$ و یا $f(x) = 0$ برقرار است).

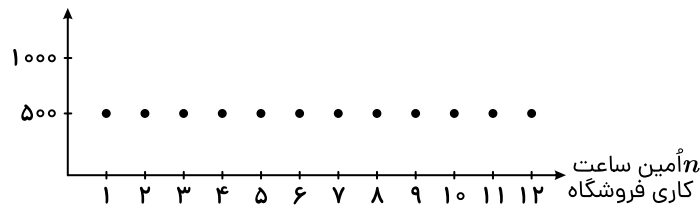
۲۱) یکشنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول (۱) و هزینه دریافتی مطابق جدول (۲)، نمودار زیر را کامل کنید.

هزینه توقفگاه
(تومان)

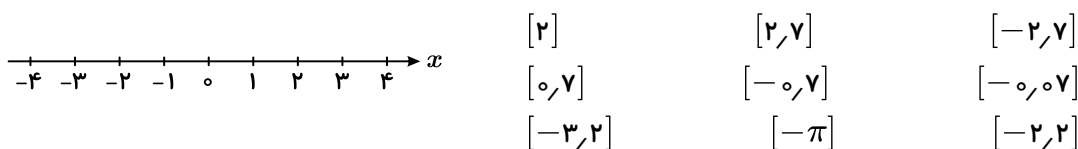


پاسخ:

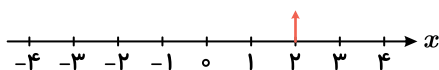
هزینه توقفگاه
(تومان)



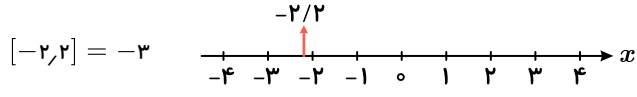
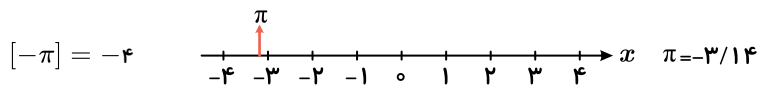
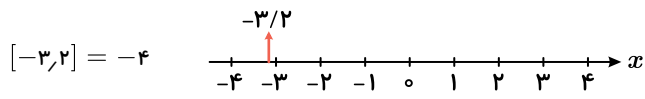
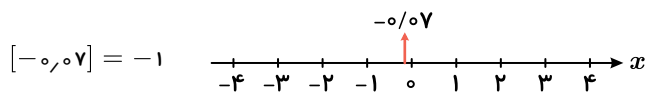
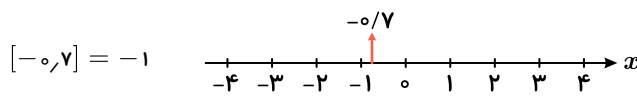
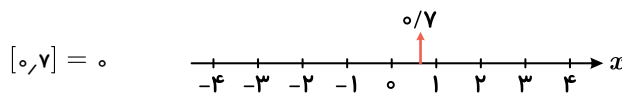
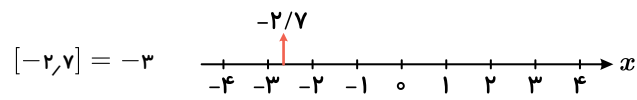
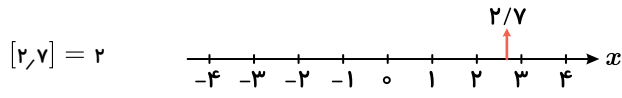
۲۲) به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.



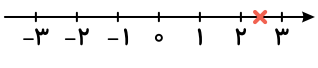
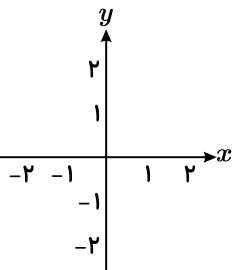
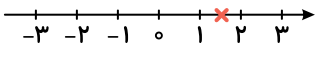
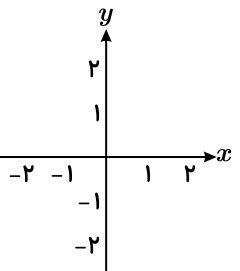
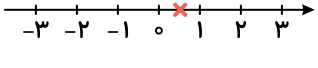
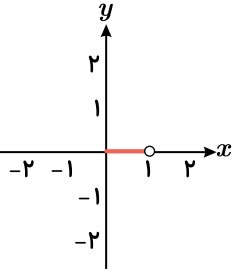
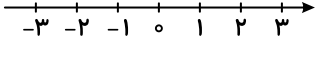
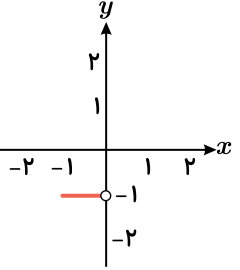
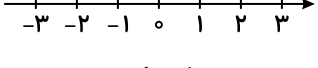
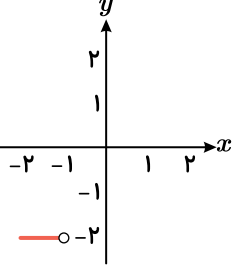
$$[2] = 2$$

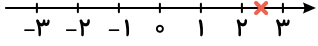
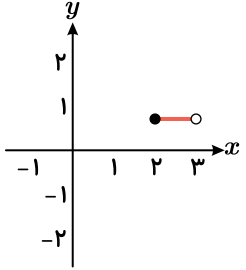
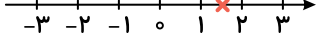
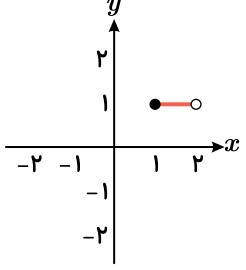

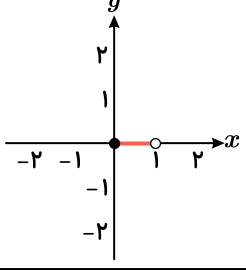
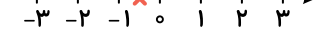
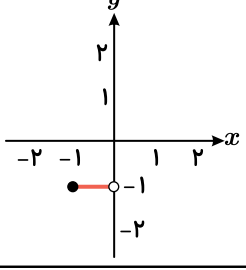

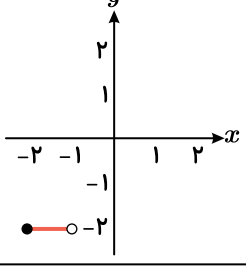


پاسخ:



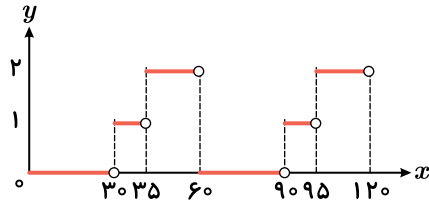
۲۳ با توجه به تابع $g(x) = [x]$ ، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) =$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) =$	
 $\leq x <$	$g(x) = -1$	
 $\leq x <$	$g(x) =$	

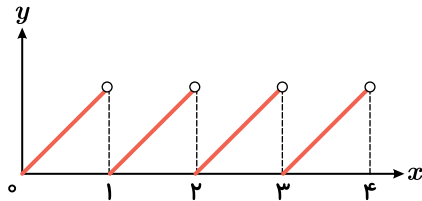
حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) = 2$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) = 0$	
 $-1 \leq x < 0$	$g(x) = -1$	
 $-2 \leq x < -1$	$g(x) = -2$	

پاسخ:

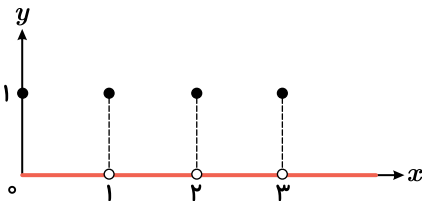
۲۴ هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.



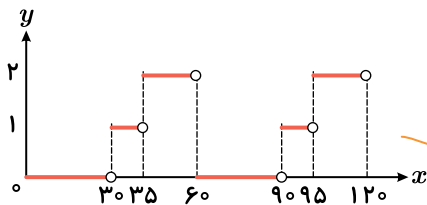
یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



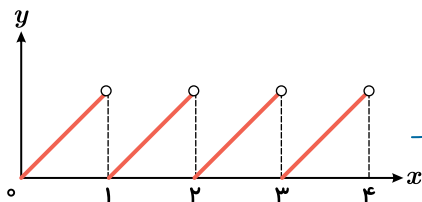
پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



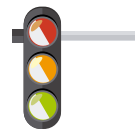
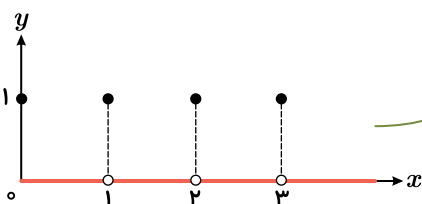
چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت است.



یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.

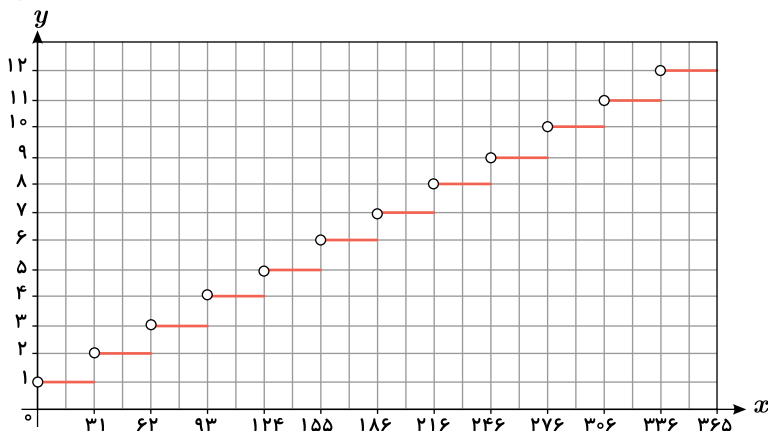


چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالت است.

پاسخ:

۲۵ نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطه تابع

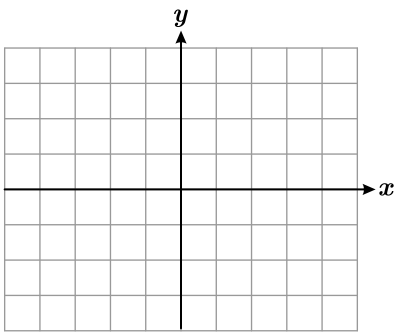
را بنویسید؟



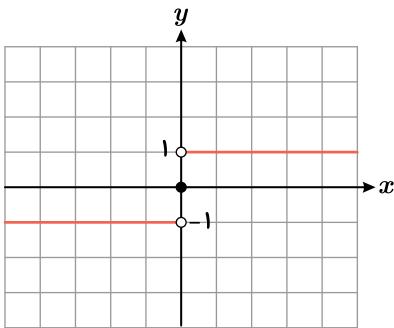
پاسخ: تعداد روزها در ماه‌های مختلف سال محور طول‌ها (x) نشان‌دهندهٔ تعداد روزها و محور عرض‌ها (y) نشان‌دهندهٔ ماه‌های سال است. ضابطهٔ تابع به صورت مقابل است.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq 31 \\ 2 & , 31 < x \leq 62 \\ 3 & , 62 < x \leq 93 \\ 4 & , 93 < x \leq 124 \\ 5 & , 124 < x \leq 155 \\ 6 & , 155 < x \leq 186 \\ 7 & , 186 < x \leq 216 \\ 8 & , 216 < x \leq 246 \\ 9 & , 246 < x \leq 276 \\ 10 & , 276 < x \leq 306 \\ 11 & , 306 < x \leq 336 \\ 12 & , 336 \leq x \leq 365 \end{cases}$$

۲۶) بر اساس ضابطهٔ تابع پلکانی $y = f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$



$$D_f = \mathbb{R} \quad , \quad R_f = \{-1, 0, 1\}$$

پاسخ:

۲۷) جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱,۳۰۰,۰۰۰
۱۰	مازاد بر ۱,۳۰۰,۰۰۰ تا ۲,۵۰۰,۰۰۰
۱۵	مازاد بر ۲,۵۰۰,۰۰۰ تا ۴,۵۰۰,۰۰۰
۲۵	مازاد بر ۴,۵۰۰,۰۰۰

الف) نمودار پیکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

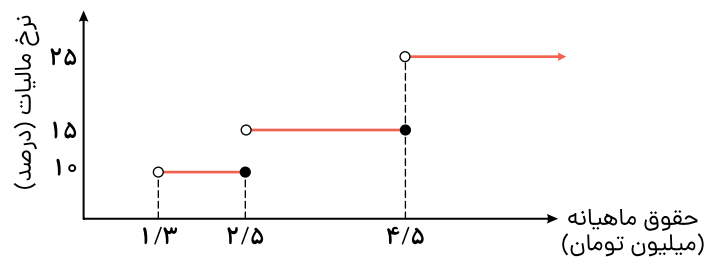
ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان

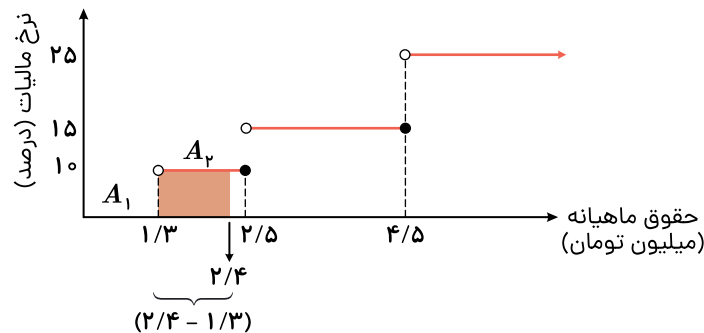
پاسخ: الف)



ب) مالیات کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان حساب می‌نمایم.

با توجه به جدول مالیاتی، کارمندان با حقوق تا ۱,۳۰۰,۰۰۰ تومان معاف از مالیات است، بنابراین کارمندی با حقوق ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان معاف از مالیات بوده و مبلغ پرداختی و سطح متناظر با نمودار پلکانی آن صفر خواهد بود.

مالیات کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان را حساب می‌نمایم:



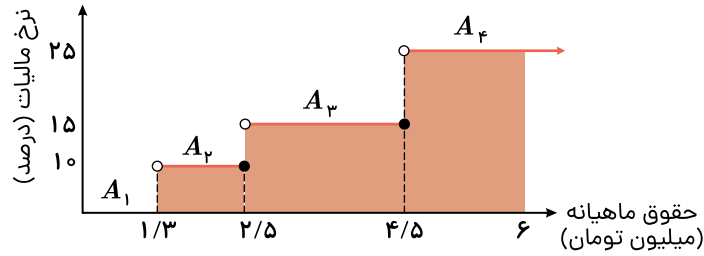
مساحت $A_1 = 0$

$$\text{مساحت } A_p = \text{طول} \times \text{عرض} = (2,400,000 - 1,300,000) \times \frac{10}{100} = 1,100,000 \times \frac{10}{100} = 110,000$$

$$\text{تومان مبلغ مالیات} = A_1 + A_p = 0 + 110,000 = 110,000$$

یعنی براساس نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی، کارمندی با حقوق ۲,۴۰۰,۰۰۰ تومان، مبلغ ۱۱۰,۰۰۰ تومان مالیات پرداخت می‌کند.

مالیات کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان را حساب می‌نمایم:



مساحت $A_1 = 0$

$$\text{مساحت } A_2 = (2,500,000 - 1,300,000) \times \frac{10}{100} = 1,200,000 \times \frac{10}{100} = 120,000$$

$$\text{مساحت } A_3 = (4,500,000 - 2,500,000) \times \frac{15}{100} = 2,000,000 \times \frac{15}{100} = 300,000$$

$$\text{مساحت } A_4 = (6,000,000 - 4,500,000) \times \frac{25}{100} = 1,500,000 \times \frac{25}{100} = 375,000$$

$$\text{مبلغ مالیات} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 + 120,000 + 300,000 + 375,000 = 795,000 \text{ تومان}$$

یعنی براساس نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی، کارمندی با حقوق ۶,۰۰۰,۰۰۰ تومان مبلغ ۷۹۵,۰۰۰ تومان مالیات پرداخت می‌کند.

(۲۸) با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2,3$	
	$x = 5$	
$f(x) = [-x]$	$x = 1,7$	
	$x = 2,3$	
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	
	$x = 1,3$	
	$x = 1,7$	
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	
	$x = 0,2$	
	$x = 1,3$	

پاسخ:

الف) $f(x) = [x]$

$$f(-2,3) = [-2,3] = -3$$

$$f(5) = [5] = 5$$

ب) $f(x) = [-x]$

$$f(1,7) = [-1,7] = -2$$

$$f(2,3) = [2,3] = 2$$

ج) $f(x) = [x] + [-x]$

$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

$$x = 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

$$f(1,3) = [1,3] + [-1,3] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

روش دوم:

$$x = 1,3 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(1,7) = [1,7] + [-1,7] = 1 + (-2) = 1 - 2 = -1$$

روش دوم:

$$x = 1,7 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 2 - 2 = 0$$

روش دوم:

$$x = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$$

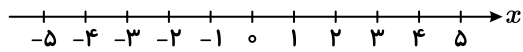
$$د) f(x) = [3x]$$

$$f(1) = [3 \times 1] = [3] = 3$$

$$f(0,2) = [3 \times 0,2] = [0,6] = 0$$

$$f(1,3) = [3 \times 1,3] = [3,9] = 3$$

۳۹) به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$[4,2] = \dots\dots [-4,2] = \dots\dots [3,99] = \dots\dots$$

$$[-1,2] = \dots\dots [-2] = \dots\dots [\pi] = \dots\dots$$

پاسخ:

$$[4,2] = 4$$

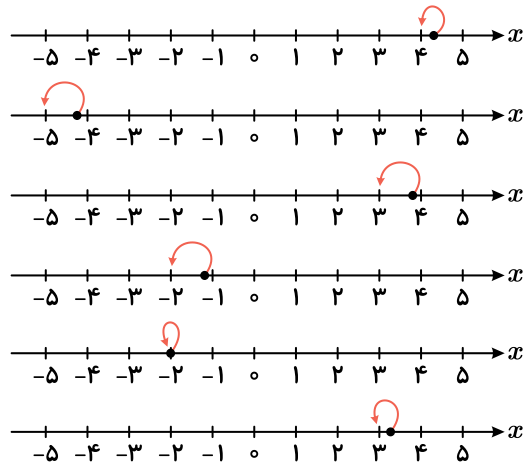
$$[-4,2] = -5$$

$$[3,99] = 3$$

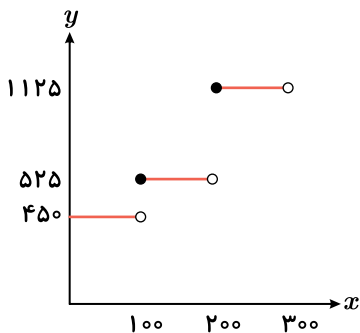
$$[-1,2] = -2$$

$$[-2] = -2$$

$$[\pi] = 3$$


 (یادآوری: $\pi \approx 3,14$)

۳۰) به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:



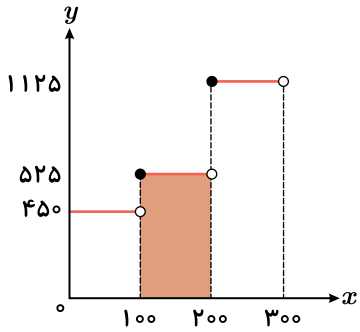
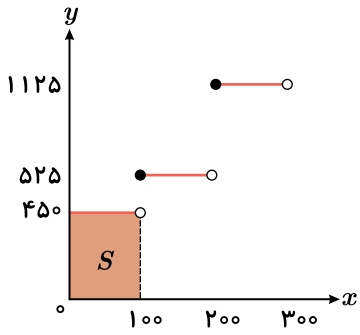
پاسخ:

 الف) هزینه 100 kWh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟

پاسخ:

$$100 \times 450 = 45000$$

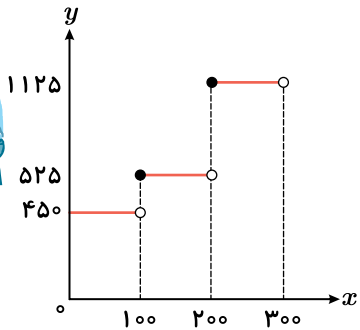
 بله، مساحت قسمت هاشورزده در شکل زیر برابر هزینه برق مصرفی 100 kWh اول است.



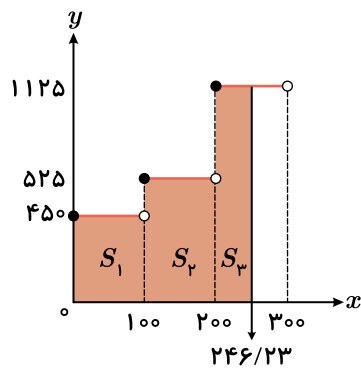
ب مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

پاسخ: بیانگر هزینه برق مصرف 100 kWh دوم است یعنی از 100 تا 200 کیلووات ساعت.

پ هزینه کل برق مصرفی این خانه ($246,23 \text{ kWh}$) معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزیند و مقدار هزینه را مشخص کنید.



پاسخ:



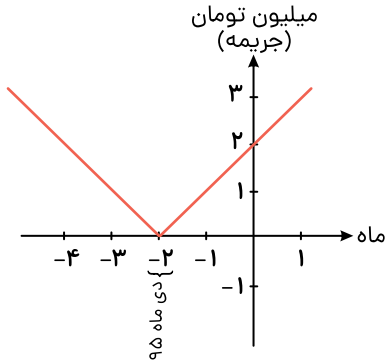
$$S_1 = 450 \times 100 = 45000$$

$$S_2 = 525 \times 100 = 52500$$

$$S_3 = 1125 \times 46,23 = 52008,75$$

هزینه کل برق مصرفی برابر مجموع مساحت‌های قسمت‌های هاشور زده است.

$$45000 + 52500 + 52008,75 = 149508,75$$

۳۱) با توجه به نمودار:


الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هریک از نیم‌خطها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

ج) به کمک تعریف تابع قدرمطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا

کاهش شیب خط به چه معناست؟

پاسخ: الف) با توجه به نمودار، پروژه باید در ماه ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر اتمام پروژه زودتر یا دیرتر از موعد انجام شود، پیمانکار متعهد است به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند.

ب)

گام اول: با استفاده از دو نقطه $(0, 2)$ و $(-2, 0)$ شیب نیم‌خط سمت راست (۱) را تعیین می‌کنیم:

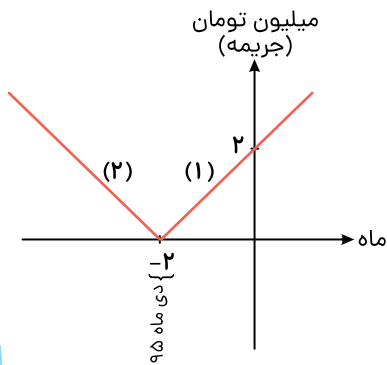
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

گام دوم: مختصات یک نقطه از خط و شیب خط را در معادله زیر جایگذاری می‌کنیم، تا معادله خط به دست آید.

$$(x_0, y_0) = (0, 2), m = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y - 2 = x \Rightarrow y = x + 2$$



گام سوم: معادله نیم‌خط (۲) را با قرینه کردن نیم‌خط (۱) مشخص می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 & : (1) \text{ معادله نیم‌خط} \\ -(x + 2), & x < -2 & : (2) \text{ معادله نیم‌خط} \end{cases}$$

ج)

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 2, \quad x \geq -2 \\ y = -(x + 2), \quad x < -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y = |x + 2|$$

د) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه، مقدار جریمه را به نسبت مدت زمان تقدم یا تأخر تحویل پروژه بیان می‌کند. افزایش شیب به معنای افزایش میزان جریمه نسبت به واحد زمان است و کاهش شیب به معنای کاهش میزان جریمه نسبت به واحد زمان است.

۳۲) نمودار توابع زیر را رسم کنید.

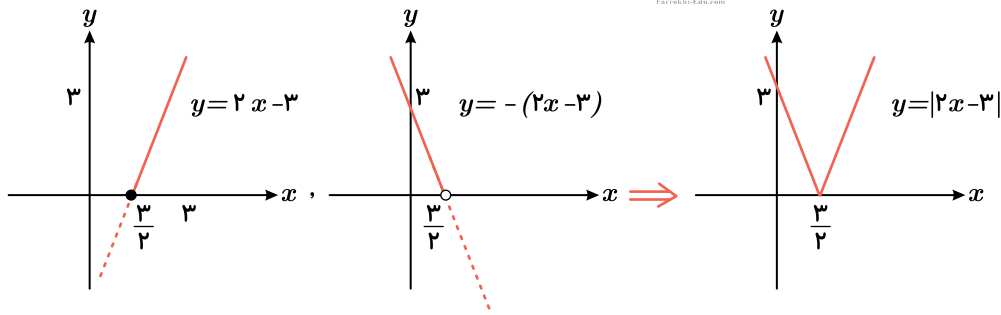
الف) $y = |2x - 3|$ ب) $y = |3x + 1|$

پاسخ:

$$y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3), & 2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y = 2x - 3, \quad x \geq \frac{3}{2} \quad \begin{array}{r|l} x & \frac{3}{2} \quad 3 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array}$$

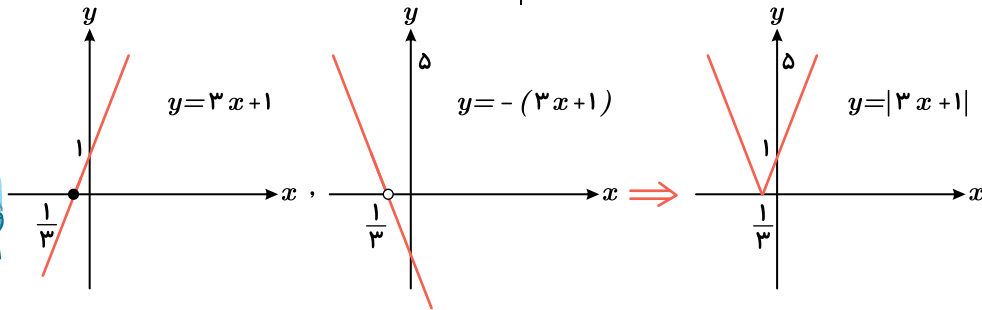
$$y = -(2x - 3) = -2x + 3, \quad x < \frac{3}{2} \quad \begin{array}{r|l} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 3 \quad 1 \end{array}$$



$$b) y = |3x + 1| = \begin{cases} 3x + 1 & , 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \\ -(3x + 1) = -3x - 1 & , 3x + 1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = 3x + 1, x \geq -\frac{1}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{3} \quad 0 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

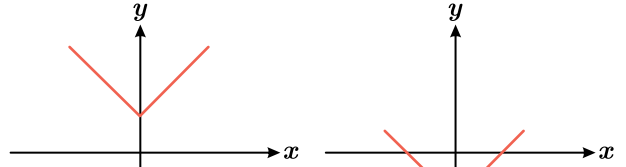
$$y = -(3x + 1) = -3x - 1, x < -\frac{1}{3} \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad -\frac{2}{3} \\ \hline y & 2 \quad 5 \end{array}$$



۳۳) با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع «الف» و کدام نمودار، تابع «ب» را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

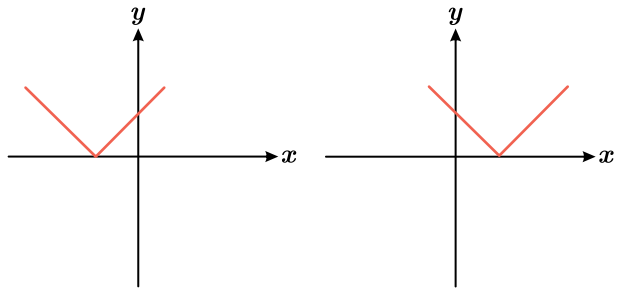
الف) $y = |x| + 2$

ب) $y = |x| - 3$



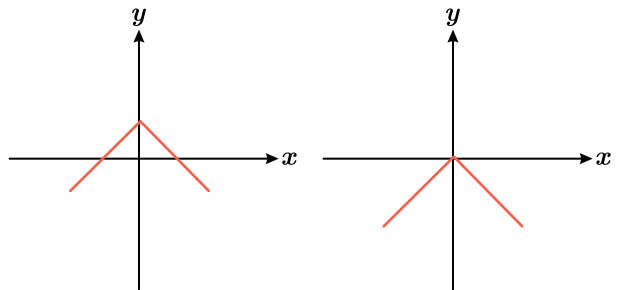
الف) $y = |x + 1|$

ب) $y = |x - 4|$



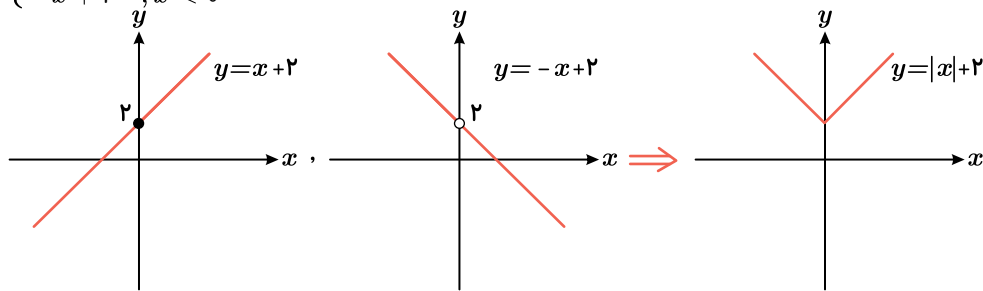
الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + 1$

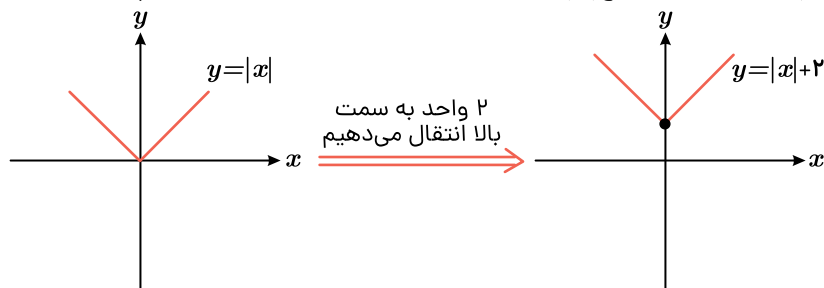


پاسخ: روش اول:

$$\text{الف) } y = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2, & x \geq 0 \\ -x + 2, & x < 0 \end{cases}$$

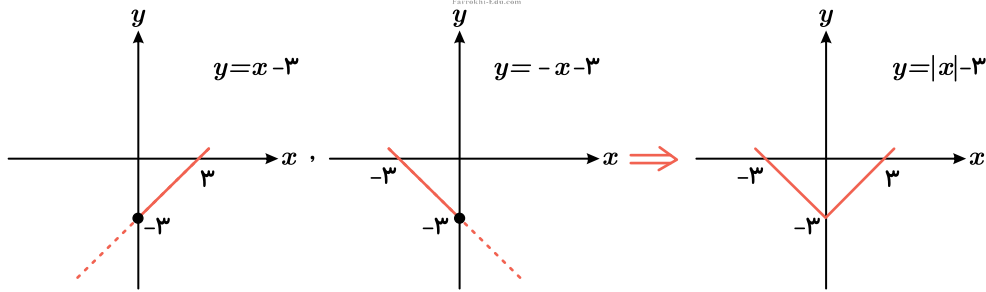


روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x| + 2$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را دو واحد به سمت مثبت محور y ‌ها (بالا) انتقال دهیم.

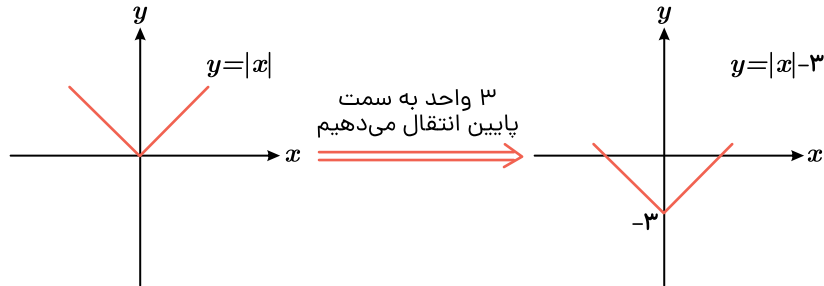


$$\text{ب) } y = |x| - 3 = \begin{cases} x - 3, & x \geq 0 \\ -x - 3, & x < 0 \end{cases}$$

روش اول:



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x| - 3$ کافیت نمودار تابع $y = |x|$ را سه واحد به سمت منفی محور y ها (پایین) انتقال دهیم.



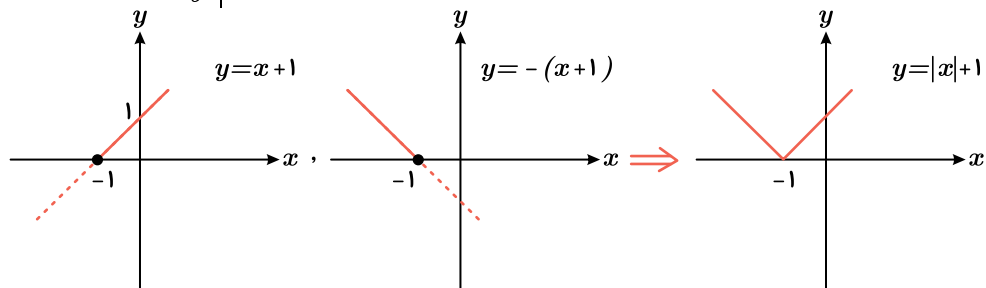
روش اول:

$$y = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & , x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 & (1) \\ -(x + 1) & , x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 & (2) \end{cases}$$

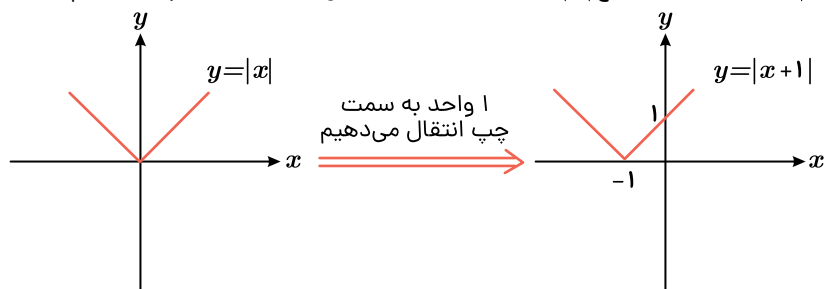
خطوط (1) و (2) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می کنیم.

$$(1) \quad y = x + 1, \quad x \geq -1 \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad y = -(x + 1), \quad x < -1 \quad \begin{array}{c|cc} x & -2 & -3 \\ y & 1 & 2 \end{array}$$



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x + 1|$ کافیت نمودار تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت منفی محور x ها (سمت چپ) انتقال دهیم.



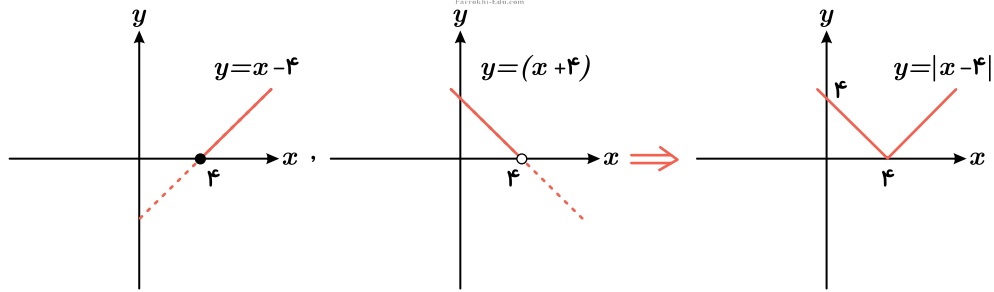
روش اول:

$$y = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & , x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 & (1) \\ -(x - 4) & , x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4 & (2) \end{cases}$$

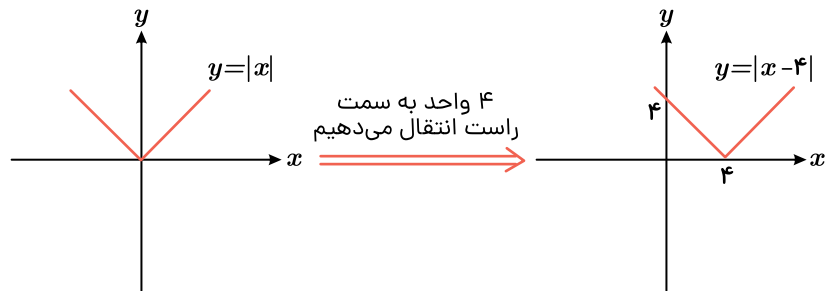
خطوط (1) و (2) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می کنیم.

$$(1) \quad y = x - 4, \quad x \geq 4 \quad \begin{array}{c|cc} x & 4 & 5 \\ y & 0 & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad y = -(x - 4) = -x + 4, \quad x < 4 \quad \begin{array}{c|cc} x & 3 & 2 \\ y & 1 & 2 \end{array}$$



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = |x - 4|$ ، کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را چهار واحد به سمت مثبت محور x ها (سمت راست) انتقال دهیم.



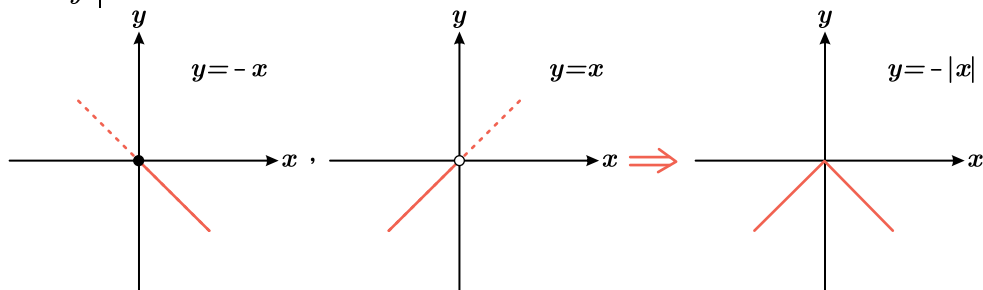
روش اول:

$$y = -|x| = \begin{cases} -x & , x \geq 0 \\ -(-x) = x & , x < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

خطوط (۱) و (۲) را در دامنه تعریف به تفکیک رسم نموده و در نهایت نمودار تابع اصلی را رسم می‌کنیم.

$$(1) \quad y = -x \quad x \geq 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & -1 \end{array}$$

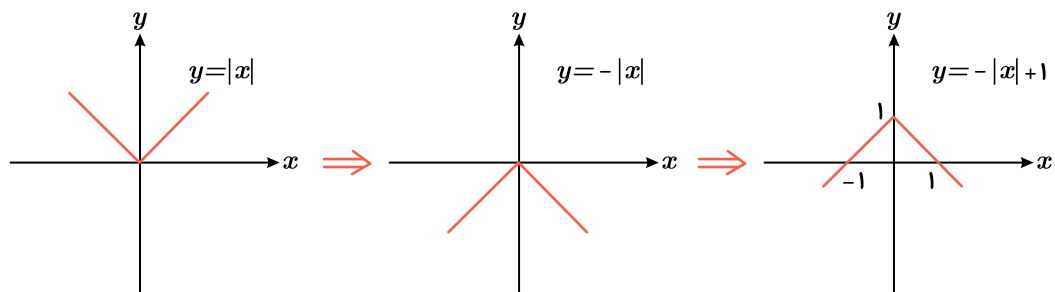
$$(2) \quad y = x \quad x < 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$



روش دوم: برای رسم نمودار تابع $y = -|x|$ کافیست نمودار تابع $y = |x|$ را نسبت به محور طول‌ها (x ها) قرینه کنیم.

$$b) \quad y = -|x| + 1$$

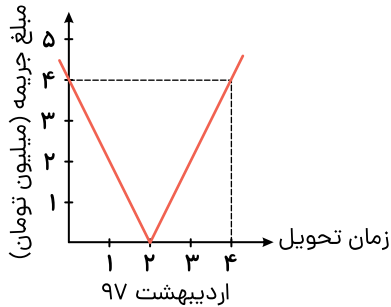
پاسخ: برای رسم نمودار تابع $y = -|x| + 1$ نمودار تابع $y = -|x|$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه کرده و یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



$$y = -|x| + 1 \leftarrow \begin{array}{c} \text{نسبت به محور } x \text{ ها قرینه و} \\ \text{یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم} \end{array} y = |x|$$

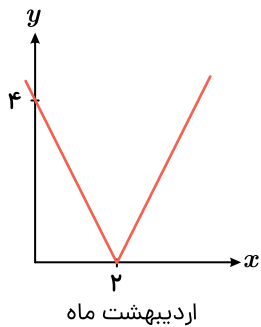
۳۴ پل‌ی که روی رودخانه سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در اردیبهشت ۹۷ افتتاح شود. اگر احداث زودتر از موعد مقرر انجام شود به دلیل نگهداری و عدم استفاده موجب خسارت است و همچنین تاخیر در تحویل موجب ضرر وزارت

است و براساس قرارداد به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل پیمانکار متعهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. با توجه به نمودار:



پاسخ:

الف شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.



پاسخ: اگر پروژه را در ماه دوم (اردیبهشت) تحویل دهند، جریمه نمی‌شوند؛ ولی به ازای هر زمان در تأخیر تحویل پروژه، جریمه پرداخت خواهند کرد.

ب به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هریک از نیم‌خطها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پاسخ: برای قسمت اول (ابتدای سال تا اردیبهشت) با استفاده از دو نقطه $(0, 4)$ و $(2, 0)$ داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{عرض از مبدأ: } 4$$

$$\text{معادله خط: } y = -2x + 4 \quad x < 2$$

برای قسمت دوم (اردیبهشت تا تیر) با استفاده از دو نقطه $(2, 0)$ و $(4, 4)$ داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{عرض از مبدأ: } -4$$

$$\text{معادله خط: } y = 2x - 4 \quad x \geq 2$$

پ به کمک تعریف تابع قدرمطلق، تابع دو ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4, & x < 2 \end{cases}$ را با یک ضابطه بیان کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4, & x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = |2x - 4|$$

ت شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

پاسخ: اگر شیب خط مثبت باشد، یعنی تأخیر در زمان تحویل پروژه و اگر شیب خط منفی باشد، یعنی تحویل پروژه زودتر انجام شده است.

۳۵ به سوالات زیر پاسخ دهید.

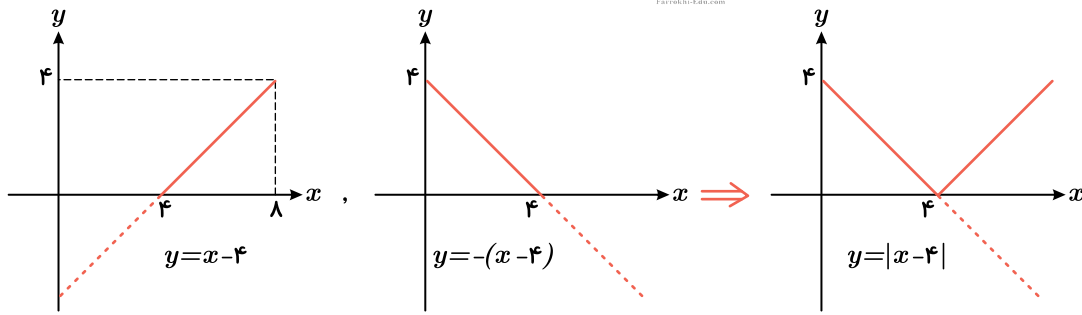
پاسخ:

الف نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا تابع قدرمطلق را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = |x - 4|$$

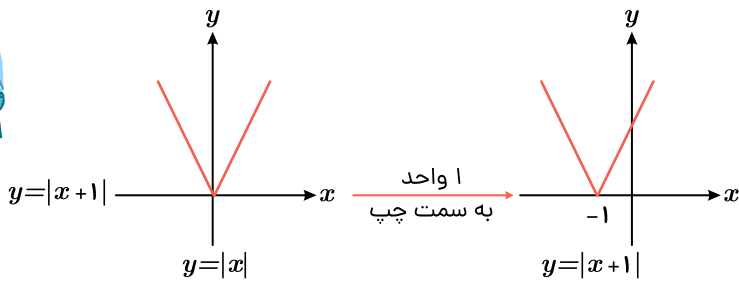
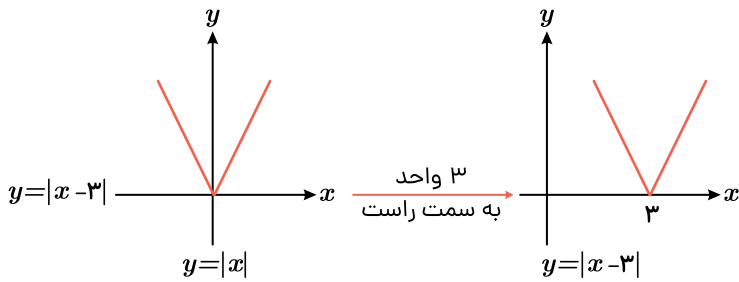
$$y = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ -(x - 4), & x \leq 4 \end{cases}$$



ب آیا می‌توان بدون نوشتن تابع دوضابطه‌ای، براساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟
 پاسخ: بله می‌توان با انتقال دادن نمودار مختصاتی تابع $y = |x|$ به اندازه ۴ واحد به سمت راست روی محور طول‌ها نمودار مختصاتی تابع $y = |x - 4|$ را به دست آورد.

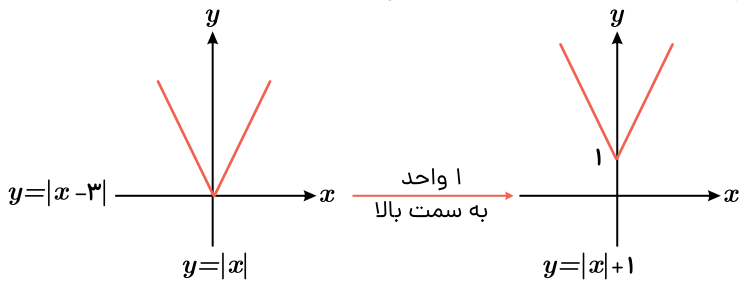
پ نمودار $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ:



ت نمودار $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان براساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟

پاسخ: برای رسم نمودار مختصاتی تابع $y = |x| + 1$ می‌توان نمودار مختصاتی تابع $y = |x|$ را یک واحد به سمت بالا روی محور عرض‌ها انتقال داد.



۳۶ اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

ب) $f \times g$

الف) $f + g$

د) $\frac{f}{g}$

ج) $\frac{g}{f}$

و) $g - f$

ه) $f - g$

پاسخ: ابتدا اشتراک دامنه‌های دو تابع f و g را مشخص می‌کنیم.

الف) $D_f = \{2, 4, -1\}$ ، $D_g = \{2, 3, -1\}$

$$D_f \cap D_g = \{2, -1\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 5 = 5 \\ (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g) = \{(2, 5), (-1, 5)\}$$

$$ب) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow \begin{cases} (f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 0 \times 5 = 0 \\ (f \times g)(-1) = f(-1) \times g(-1) = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \times g = \{(2, 0), (-1, 6)\}$$

$$ج) D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

با توجه به اینکه $f(2) = 0$ است، دامنه تابع $\frac{g}{f}$ به صورت $\{-1\}$ است.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{g}{f}\right)(-1) &= \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right.$$

$$د) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{2, -1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(2) &= \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{5} = 0 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(-1) &= \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ (2, 0), \left(-1, \frac{3}{2}\right) \right\}$$

$$ه) (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 0 - 5 = -5 \\ (f-g)(-1) = f(-1) - g(-1) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f-g = \{(2, -5), (-1, 1)\}$$

$$و) (g-f)(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow \begin{cases} (g-f)(2) = g(2) - f(2) = 5 - 0 = 5 \\ (g-f)(-1) = g(-1) - f(-1) = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g-f = \{(2, 5), (-1, -1)\}$$

$$:f_2(x) = x + 1 \text{ و } f_1(x) = x^2 - 1 \text{ با توجه به ضابطه‌های } (37)$$

پاسخ:

الف

$$a) f_+(x) = (f_1 + f_2)(x) = (x^r - 1) + (x + 1) =$$

$$b) f_-(x) = (f_1 - f_2)(x)$$

$$c) f_\Delta(x) = (f_2 - f_1)(x)$$

$$d) f_\times(x) = (f_1 \times f_2)(x)$$

$$e) f_\vee(x) = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)$$

$$f) f_\wedge(x) = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x)$$

پاسخ:

$$a) f_+(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x^r - 1) + (x + 1) = x^r + x$$

$$\Rightarrow f_+(x) = x^r + x$$

$$b) f_-(x) = f_1(x) - f_2(x) = x^r - 1 - (x + 1) = x^r - 1 - x - 1 = x^r - x - 2$$

$$\Rightarrow f_-(x) = x^r - x - 2$$

$$c) f_\Delta(x) = f_2(x) - f_1(x) = x + 1 - (x^r - 1) = x + 1 - x^r + 1 = -x^r + x + 2$$

$$\Rightarrow f_\Delta(x) = -x^r + x + 2$$

$$d) f_\times(x) = f_1(x) \times f_2(x) = (x^r - 1)(x + 1) = x^r + x^r - x - 1$$

$$\Rightarrow f_\times(x) = x^r + x^r - x - 1$$

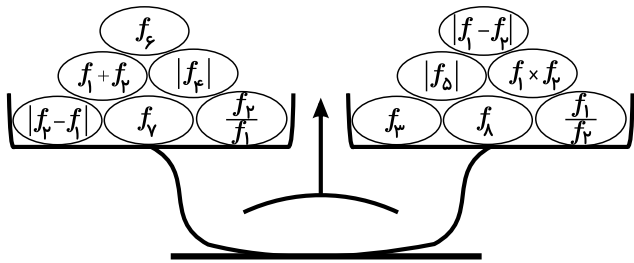
$$e) f_\vee(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x^r - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \stackrel{x \neq -1}{=} x - 1$$

$$\Rightarrow f_\vee(x) = x - 1, x \neq -1$$

$$f) f_\wedge(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x + 1}{x^r - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} \stackrel{x \neq -1}{=} \frac{1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow f_\wedge(x) = \frac{1}{x - 1}, x \neq -1$$

ب اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به‌ازای $x = 2$ نمادهای وزنه‌های ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



پاسخ:

حال با توجه به ضابطه توابع f_1 تا f_8 به‌ازای $x = 2$ مقادیر دو کفه ترازو را به دست می‌آوریم:
کفه چپ ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_6(x) = x^2 + x^2 - x - 1 \Rightarrow f_6(2) = 2^2 + 2^2 - 2 - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$$

$$\Rightarrow f_6(2) = 9$$

$$f_1(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f_1(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$f_2(x) = x + 1 \Rightarrow f_2(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow f_1(2) + f_2(2) = 3 + 3 = 6$$

$$f_4(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f_4(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f_4(2) = 0 \Rightarrow |f_4(2)| = 0$$

$$f_2(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow |f_2(2) - f_1(2)| = |3 - 3| = 0$$

$$f_5(x) = x - 1 \Rightarrow f_5(2) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow f_5(2) = 1$$

$$f_2(2) = 3, f_1(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت چپ برابر است با:

$$f_6 + (f_1 + f_2) + |f_4| + |f_2 - f_1| + f_5 + \frac{f_2}{f_1} = 9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$$

کفه راست ترازو از بالا به پایین برابر است با:

$$f_1(2) = 3, f_2(2) = 3$$

$$|f_1(2) - f_2(2)| = |3 - 3| = 0 \Rightarrow |f_1(2) - f_2(2)| = 0$$

$$f_8(x) = -x^2 + x + 2 \Rightarrow f_8(2) = -2^2 + 2 + 2 = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow |f_8(2)| = |0| = 0$$

$$f_1(2) = 3, f_2(2) = 3$$

$$f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 3 = 9$$

$$f_3(x) = x^2 + x \Rightarrow f_3(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow f_3(2) = 6$$



$$f_{\lambda}(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f_{\lambda}(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow f_{\lambda}(2) = 1$$

$$f_1(2) = 3, \quad f_2(2) = 3 \Rightarrow \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{3} = 1$$

مجموع کفه سمت راست برابر است با:

$$|f_1 - f_2| + |f_{\delta}| + f_1 \times f_2 + f_2 + f_{\lambda} + \frac{f_1}{f_2} = 0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$$

مجموع دو کفه سمت راست و سمت چپ ترازو با هم برابرند. از تساوی دو کفه ترازو نتیجه می‌گیریم:

$$1) f_{\epsilon}(2) = f_1(2) \times f_2(2)$$

$$2) f_1(2) + f_2(2) = f_2(2)$$

$$3) |f_2(2)| = |f_{\delta}(2)|$$

$$4) |f_2(2) - f_1(2)| = |f_1(2) - f_2(2)|$$

$$5) f_v(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)}$$

$$6) \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = f_{\lambda}(2)$$

۳۸) یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب

$$-2x^2 + 16x, \quad 8x + 6, \quad \text{و در کارخانه } B \text{ به ترتیب } -x^2 + 12x, \quad 2x + 9, \quad \text{باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):}$$

الف) تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

ب) این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟ سود ماکزیمم چقدر است؟

پاسخ: الف) از سال گذشته به خاطر داریم اگر هزینه را از درآمد کم کنیم، سود به دست می‌آید.

$$\text{سود} = \text{درآمد (فروش)} - \text{هزینه} \Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$$

سود هر یک از کارخانه‌ها را مطابق رابطه فوق به دست می‌آوریم.

کارخانه A :

$$P_A(x) = -2x^2 + 16x - (8x + 6) = -2x^2 + 8x - 6$$

کارخانه B :

$$P_B(x) = -x^2 + 12x - (2x + 9) = -x^2 + 10x - 9$$

تابع سود شرکت هولدینگ از مجموع توابع سود دو کارخانه به دست می‌آید.

$$\text{سود کارخانه } B + \text{سود کارخانه } A = \text{سود شرکت هولدینگ}$$

$$P_H = -2x^2 + 8x - 6 + (-x^2 + 10x - 9)$$

$$P_H(x) = -3x^2 + 18x - 15 \quad D = \{x | x \geq 0\}$$

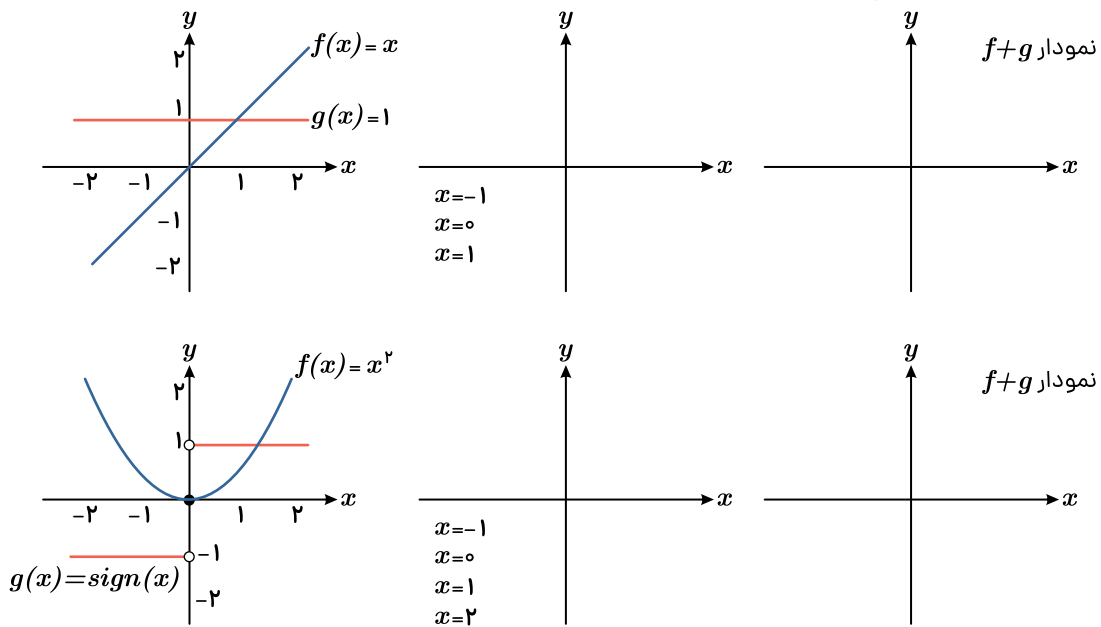
توجه داشته باشید مقدار تولید کارخانه‌ها نمی‌تواند منفی باشد، به همین دلیل دامنه اشتراک کارخانه A و B را مقادیر صفر و بزرگتر از صفر در نظر می‌گیریم.ب) تابع سود شرکت، یک تابع درجه دوم و نمودار آن به شکل سهمی \cup است.یادآوری: در تابع درجه دوم به صورت $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a < 0$ باشد، سهمی در نقطه به طول $x = \frac{-b}{2a}$ دارای بیشترین مقدار است.

$$P(x) = -3x^2 + 18x - 15 \quad (a = -3, b = 18, c = -15)$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-18}{2(-3)} \Rightarrow x = 3$$

$$P_{max} = -3(3)^2 + 18(3) - 15 = -27 + 54 - 15 \Rightarrow P_{max} = 12$$

۳۹) به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



پاسخ:

قسمت اول)

$$f(-1) = -1, \quad g(-1) = 1$$

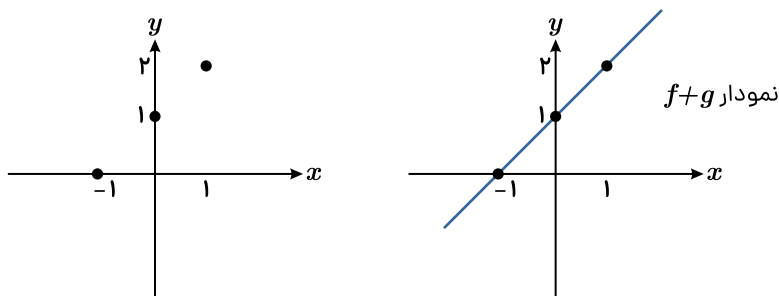
$$\Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

$$f(1) = 1, \quad g(1) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1$$

$$f(-1) = 1, \quad g(-1) = -1$$

$$\Rightarrow (f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow (-1, 0)$$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0$$

قسمت دوم)

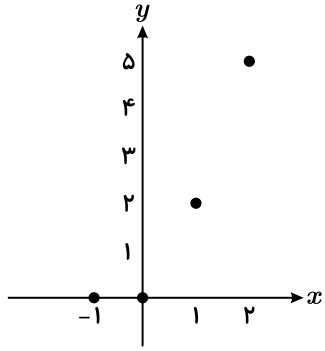
$$\Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$f(1) = 1, \quad g(1) = 1$$

$$\Rightarrow (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$$

$$f(2) = 4, \quad g(2) = 1$$

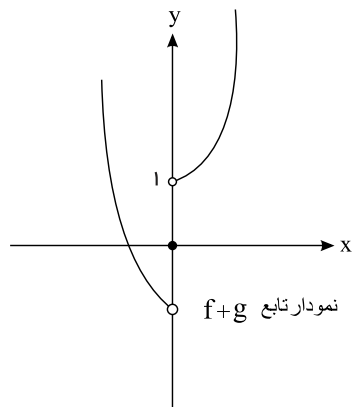
$$\Rightarrow (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 4 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5)$$



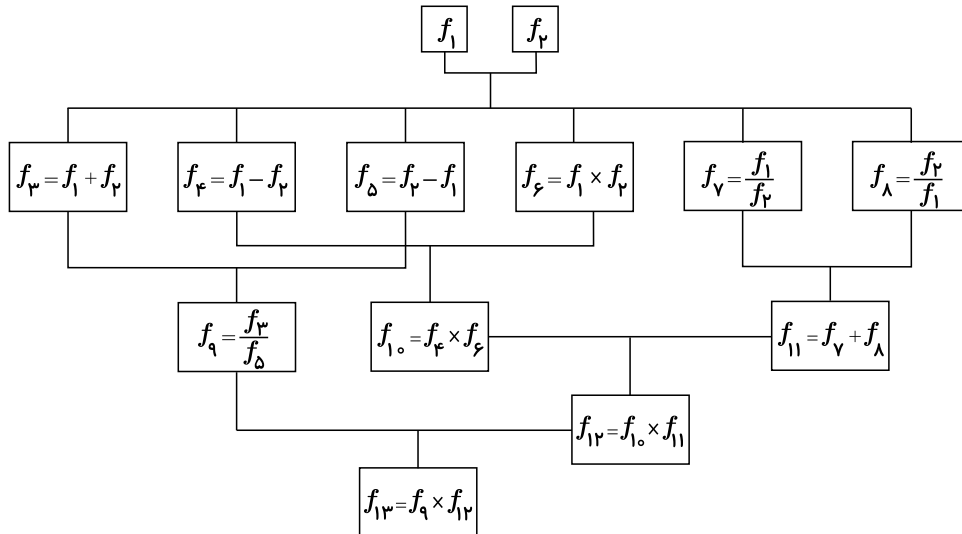
ضابطه تابع $sign(x)$ را می نویسیم و با تابع $f(x)$ به ازای $x > 0$, $x = 0$ و $x < 0$ جمع می کنیم.

$$f(x) = x^r, \quad g(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^r + 1, & x > 0 \\ x^r, & x = 0 \\ x^r - 1, & x < 0 \end{cases}$$



۴۰ با توجه به ضابطه $f_1(x) = x + 1$ و $f_2(x) = x - 1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



پاسخ:

$$f_1(x) = x + 1 \Rightarrow f_1(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f_2(x) = x - 1 \Rightarrow f_2(2) = 2 - 1 = 1$$

$$f_3(2) = f_1(2) + f_2(2) = 3 + 1 = 4$$

$$f_4(2) = f_1(2) - f_2(2) = 3 - 1 = 2$$

$$f_5(2) = f_2(2) - f_1(2) = 1 - 3 = -2$$

$$f_6(2) = f_1(2) \times f_2(2) = 3 \times 1 = 3$$

$$f_7(2) = \frac{f_1(2)}{f_2(2)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$f_8(2) = \frac{f_2(2)}{f_1(2)} = \frac{1}{3}$$

$$f_9(2) = \frac{f_3(2)}{f_5(2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

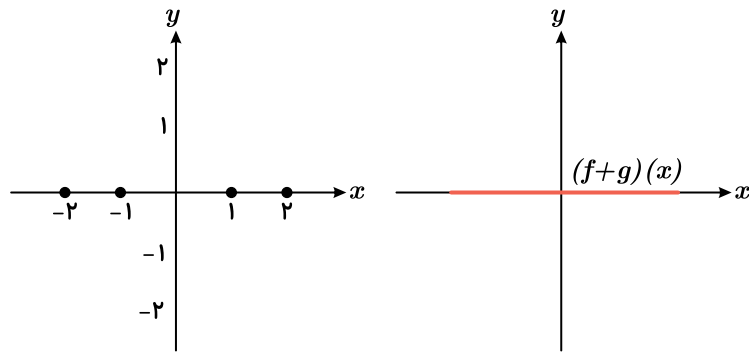
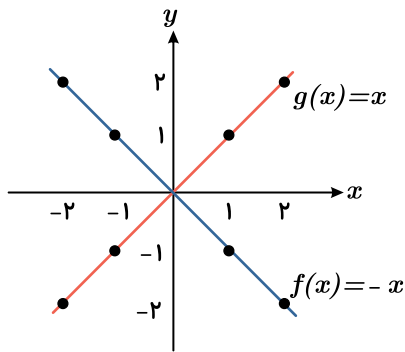
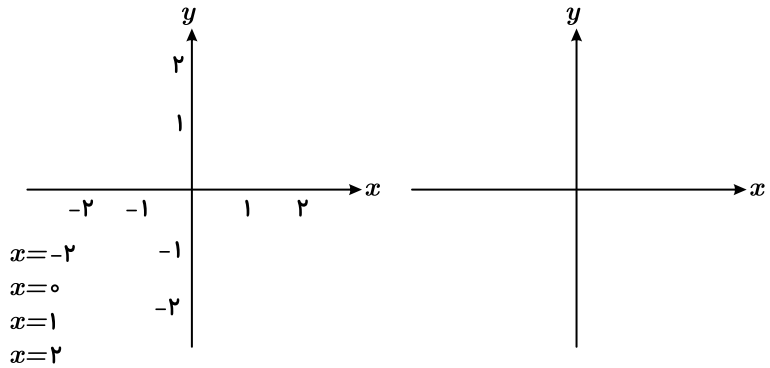
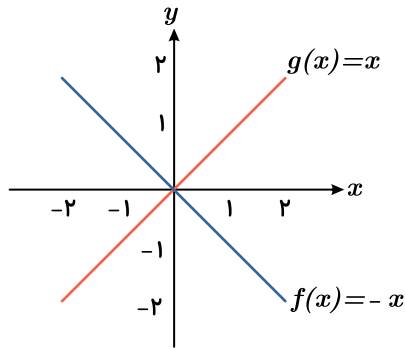
$$f_{10}(2) = f_4(2) \times f_6(2) = 2 \times 3 = 6$$

$$f_{11}(2) = f_7(2) + f_8(2) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$f_{12}(2) = f_{10}(2) \times f_{11}(2) = 6 \times \frac{10}{3} = 20$$

$$f_{13}(2) = f_9(2) \times f_{12}(2) = -2 \times 20 = -40$$

۴۱) به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f + g)$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



پاسخ:

$$f(x) = -x \quad D_f = \mathbb{R}$$

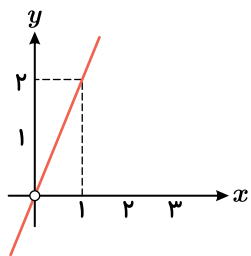
$$g(x) = x \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f+g} = d_f \cap d_g = \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -x + x = 0$$

$$\Rightarrow (f + g)(x) = 0 \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

۴۲) اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید؟



پاسخ: برای تعیین ضابطه تابع $g(x)$ لازم است ضابطه تابع $(\frac{f}{g})(x)$ را مشخص کنیم و برای آن باید معادله خط نمودار رسم شده را به دست آوریم.

با توجه به شکل عرض از مبدأ خط مورد نظر $h = 0$ است، بنابراین برای تعیین شیب خط، مختصات نقطه $(1, 2)$ را در معادله استاندارد خط جایگزین می کنیم.

$$y = mx + h \xrightarrow[h=0]{\text{نقطه } (1,2)} 2 = m(1) + 0 \Rightarrow m = 2$$

با مشخص بودن شیب و عرض از مبدأ معادله خط را می نویسیم.

$$y = mx + h \xrightarrow[h=0]{m=2} y = 2x$$

روش دوم: شیب خط برابر تغییرات y نسبت به تغییرات x است.

با توجه به نمودار، شیب خط 2 و عرض از مبدأ صفر بوده و معادله خط به صورت $y = 2x$ است.

ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ همان معادله خط است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x$$

اکنون که ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ مشخص شده می‌توانیم ضابطه تابع g را نیز تعیین کنیم.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 2x \xrightarrow{f(x)=x^2} \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow 2x \times g(x) = x^2$$

طرفین را بر $2x$ تقسیم می‌کنیم

$$g(x) = \frac{x^2}{2x} \quad (x \neq 0)$$

با در نظر گرفتن $x \neq 0$ می‌توانیم صورت و مخرج کسر را به x ساده کنیم.

$$g(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x$$

۴۳ اگر $f(x) = [x]$ با دامنه $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنه $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$

در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار	ضابطه	تابع
.....	$s(x) = \dots\dots$	$s(x) = f(x) + g(x)$
.....	$q(x) = \dots\dots$	$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$
.....	$p(x) = \dots\dots$	$p(x) = h(x) \times g(x)$

پاسخ: الف) ابتدا ضابطه تابع $s(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$s(x) = f(x) + g(x) = [x] + |x|$$

دامنه تابع s از اشتراک دامنه‌های توابع f و g به دست می‌آید.

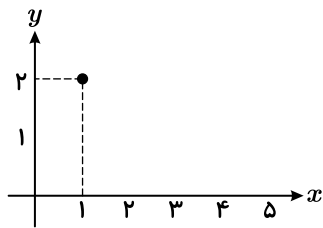
$$D_s = D_f \cap D_g = \{x | 0 \leq x \leq 1\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 2\} = \{1\}$$

دامنه تابع s فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، اکنون مقدار تابع s را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$s(x) = [x] + |x|, \quad x = 1$$

$$s(1) = [1] + |1| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow y = 2$$

بنابراین نمودار تابع s نقطه‌ای به مختصات $(1, 2)$ است.



ب) گام اول: ضابطه تابع $q(x)$ را مشخص می‌کنیم.

$$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 4}{[x]}$$

گام دوم: دامنه تابع q از اشتراک دامنه‌های توابع f و h ، با حذف مقادیری از x که تابع f (مخرج) را صفر می‌کند، به دست می‌آید.

$$D_h \cap D_f = \{x | -1 \leq x \leq 1\} \cap \{x | 0 \leq x \leq 1\} = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

(یادآوری: در فاصله $0 \leq x < 1$ جزء صحیح همه اعداد، صفر می‌شود.)

$$D_q = D_h \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

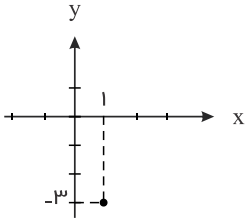
$$D_q = \{x | 0 \leq x \leq 1\} - \{x | 0 \leq x < 1\} = \{1\}$$

دامنه تابع q فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، مقدار تابع q را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad x = 1$$

$$q(1) = \frac{1^2 - 4}{[1]} = \frac{-3}{1} = -3 \Rightarrow y = -3$$

بنابراین نمودار تابع q نقطه‌ای به مختصات $(1, -3)$ است.



ج) ضابطه تابع $p(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$p(x) = h(x) \times g(x) = (x^2 - 4)|x|$$

دامنه تابع p از اشتراک بین دامنه‌های توابع h و g به دست می‌آید.

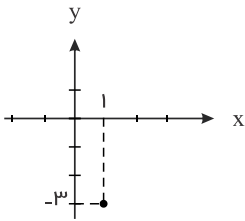
$$D_p = D_h \cap D_g = \{x | -1 \leq x \leq 1\} \cap \{x | 1 \leq x \leq 2\} = \{1\}$$

دامنه تابع p فقط دارای یک عضو $x = 1$ است، مقدار تابع p را در این نقطه تعیین می‌کنیم.

$$p(x) = (x^2 - 4)|x| \quad , \quad x = 1$$

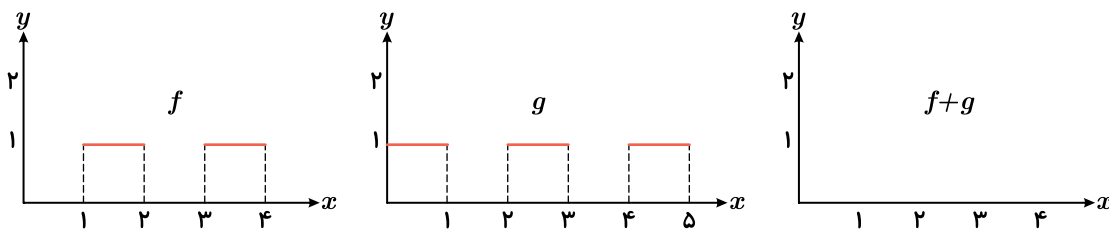
$$p(1) = (1^2 - 4)|1| = (-3) \times 1 = -3 \Rightarrow y = -3$$

بنابراین نمودار تابع p نقطه‌ای به مختصات $(1, -3)$ است.

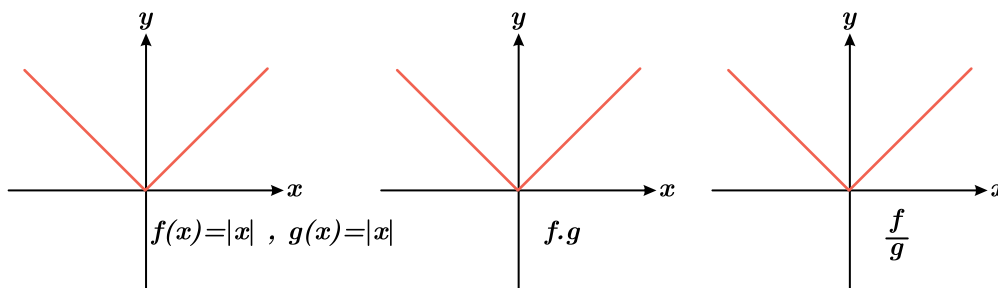


۴۴) در هر قسمت از سؤال با توجه به نمودار توابع f و g ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

(الف)

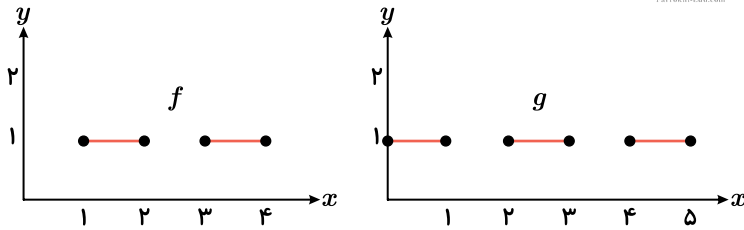


(ب)



پاسخ: الف) گام اول: با مشاهده هر نمودار و با توجه به دامنه هر یک از توابع f و g اشتراک دامنه‌ها را مشخص می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که دامنه توابع f و g در نقاط به طول $x = 1$ و $x = 2$ و $x = 3$ و $x = 4$ اشتراک دارند.



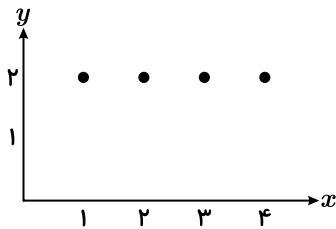
به بیان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2, 3 \leq x \leq 4\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq x \leq 3, 4 \leq x \leq 5\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x = 1, x = 2, x = 3, x = 4\}$$

 گام دوم: با مشاهده هر نمودار مقدار هریک از توابع f و g را در $D_f \cap D_g$ مشخص می‌کنیم.

 ملاحظه می‌شود که مقدار توابع f و g در اشتراک دامنه‌ها مقدار ثابت $y = 1$ است که مقدار $f + g$ در دامنه اشتراک $1 + 1 = 2$ نیز هست.


به بیان ریاضی می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = 1 \\ y = g(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = 2 \quad D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

 (ب) گام اول: با توجه به ضابطه هریک از توابع f و g ضابطه توابع خواسته شده را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = |x|$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = |x| \times |x| = |x|^2 = x^2$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{|x|} = 1$$

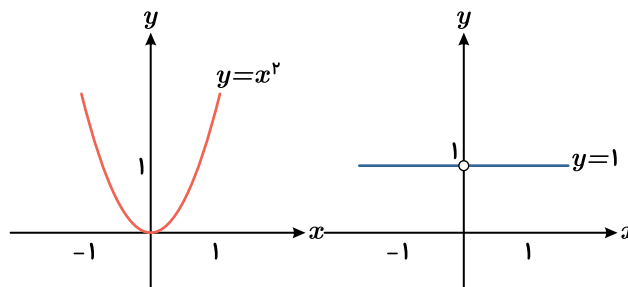
 گام دوم: با توجه به دامنه هریک از توابع f و g دامنه توابع خواسته شده را تعیین می‌کنیم.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid |x| = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

گام سوم: نمودار توابع خواسته شده را با در نظر گرفتن دامنه تعریف رسم می‌کنیم.

 از سال گذشته به خاطر داریم نمودار تابع $y = x^2$ نمودار سهمی بوده که در نقطه $(0, 0)$ دارای کمترین مقدار است و همچنین نمودار $y = 1$ خطی به موازات محور طول‌هاست که از نقطه $(0, 1)$ روی محور عرض‌ها می‌گذرد.


$$(f \times g)(x) = x^2$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\}$$